Exercice 1: Soit $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$, $x \in \mathbb{R}$ et F la primitive de f sur $\mathbb{R}$ tel que $F(0) = 0$ et $F(1) = \dfrac{\pi}{4}$

1) Montrer à l'aide des I.A.F que $|F(x)| \leq |x|$; $\forall x \in \mathbb{R}$

2) a) On pose $\varphi(x) = F(x) + \dfrac{1}{x}$; $x \geq 1$. Montrer que φ est strictement décroissante sur $[1, +\infty[$.

b) En déduire que F est majorée sur $[1, +\infty[$ et qu'elle admet une limite finie l en $+\infty$.

2) Soit $g(x)= F(x) + F(\dfrac{1}{x})$; $x \in \mathbb{R}_+^*$. Calculer $g'(x)$. En déduire que $g(x) = 2F(1)$ et que $l=\dfrac{\pi}{2}$.

3) Montrer que F est impair puis tracer la courbe C_F de la fonction F dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

4) a) Montrer que l'équation $F(x) = 2x - 1$ admet une seule solution $\alpha \in]0, 2[$.

b) On considère la suite U définie par : $U_0=0$ et $U_{n+1}= 1 + F(\dfrac{1}{2} U_n)$; $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$; $U_n \in [0,$ et que $|U_{n+1}-2\alpha| \leq \dfrac{1}{2} |U_n - 2\alpha|$. En déduire que U est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 2 : Soit f la fonction définie sur $[0, \pi[$ par $f(x)=\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}$.

1) Dresser le tableau de variation de f et tracer la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ c plan.

2) a) Montrer que f admet une fonction réciproque g définie sur $\mathbb{R}_+$. Tracer la courbe représentative de g dar un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.

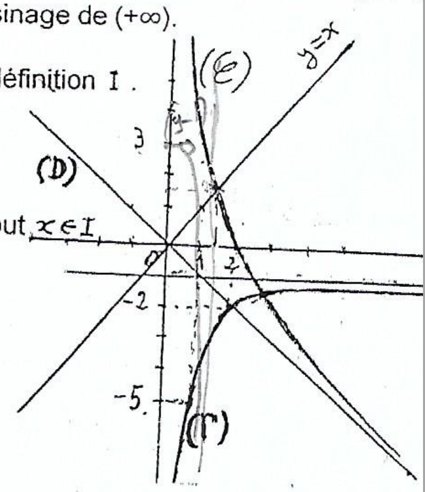
b) Montrer que g est dérivable sur$]0, +\infty[$ et que $g'(x) = \dfrac{1}{(1+x)\sqrt{x}}$.

3) Pour tout entier naturel non nul n, on pose $V_n = (n^2 + n)[\, g(\dfrac{1}{n}) - g(\dfrac{1}{n+1})\,]$. Montrer que pour tout entier naturel no nul n, il existe un réel U_n de l'intervalle $]\dfrac{1}{n+1}, \dfrac{1}{n}[$ tel que $V_n = \dfrac{1}{(1+U_n)\sqrt{U_n}}$. En déduire la limite de la suite (V_n).

Exercice 3 : On a représenté dans la graphique ci-contre les courbes $\mathscr{C}$ et Γ d'une fonction f définie e dérivable sur $]0, +\infty[$ et de sa dérivée f'. D est une asymptote oblique à C au voisinage de $(+\infty)$.

1) Reconnaître parmi $\mathscr{C}$ et Γ celle qui représente f.

2) Montrer que f admet une fonction réciproque et déterminer son ensemble de définition I . Tracer $\mathscr{C}_{f^{-1}}$.



3) a) On admet que $f'(x) = b+\dfrac{a}{x^2}$ pour tout $x>0$. Déterminer a et b .

b) En déduire l'expression de f(x) pour tout $x > 0$ puis celle de $f^{-1}(x)$ pour tout $x \in I$

4) On pose $g(x)= f\circ U(x)$ tel que $U(x)=\dfrac{1}{\cos x}$; $x \in [0, \dfrac{\pi}{2}[$.

a) Dresser le tableau de variation de g. En déduire que g est bijective.

b) déterminer le domaine k de dérivabilité de g^{-1} et calculer $(g^{-1})'(0)$

c) Tracer la courbe de g et celle de g^{-1} dans un même r.o.n $(O,\vec{i},\vec{j})$

Exercice 4 : On pose $g(x)= -\dfrac{1}{2}+\dfrac{|x|}{2\sqrt{1+x^2}}$; $x \in \mathbb{R}$

1) a) Vérifier que g est paire puis calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$.

b) Montrer que pour tout réel x : $-\dfrac{1}{2} \leq g(x) < 0$

2) a) Montrer que g admet une seule primitive f sur $\mathbb{R}$ tel que $f(0)=\dfrac{3}{2}$

b) Déterminer f(x) pour tout réel x

3) a) Dresser le tableau de va ... ...ction de f à $\mathbb{R}_+$.

b) Montrer que que ... ...cisera.

c) Montrer que h adn...

Série 18.

Ex 1/

$f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$; $\forall x \in \mathbb{R}$.

F sa primitive sur $\mathbb{R}$.

F dérivable sur $\mathbb{R}$ (primitive).

$\forall x \in \mathbb{R}$, $F'(x) = f(x)$
$= \dfrac{1}{1+x^2} > 0.$

d'où $|F'(x)| = \left|\dfrac{1}{1+x^2}\right| = \dfrac{1}{1+x^2}$.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $\dfrac{1}{1+x^2} \leq 1$

ssi $|F'(x)| \leq 1$.

D'après le IAF,

$\forall x \in \mathbb{R}$, $|F(x) - F(0)| \leq |x - 0|$

ssi $|F(x)| \leq |x|$.

2) a/ On pose $\varphi(x) = F(x) + \dfrac{1}{x}$.

$\varphi'(x) < 0$

b/ φ est strictement décroissante sur $[1,+\infty[$.

$\forall x \in [1,+\infty[$, $\varphi(x) \leq \varphi(1)$

ssi $F(x) + \frac{1}{x} \leq F(1) + 1$

$F(x) \leq F(1) + 1 - \frac{1}{x}$

$F(x) < \frac{\pi}{4} + 1 < 2.$

d'où F est majorée sur $[1,+\infty[$.

F croissante et majorée donc elle est convergente.

3) $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $g(x) = F(x) + F\left(\frac{1}{x}\right)$.

la fonction $x \mapsto F(x)$ dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$

" " $x \mapsto \frac{1}{x}$ " "

pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\frac{1}{x} \in \mathbb{R}_+^*$.

↳ la fonction $x \mapsto F$

d'où g dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

pour $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$g'(x) = f(x) + \left(\frac{1}{x}\right)' \cdot f\left(\frac{1}{x}\right)$

$= \dfrac{1}{1+x^2} - \dfrac{1}{x^2} \cdot \dfrac{1}{1+\frac{1}{x^2}}$

$= \dfrac{1}{1+x^2} - \dfrac{1}{x^2+1}$

$= 0.$

donc g constante sur $\mathbb{R}_+^*$.

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $g(x) = g(1)$
$= 2F(1)$

$\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} F(x) + F\left(\frac{1}{x}\right)$

ssi $2F(1) = l + 0$.

ssi $l = \frac{\pi}{2}$.

3) On pose $\varphi(x) = F(x) + F(-x)$.

$\forall x \in \mathbb{R}$.

φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $\varphi'(x) = 0$

donc $\varphi(x) = c$
$= \varphi(0)$
$= 0.$

d'où $F(x) = -F(-x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Le domaine d'étude se réduit à $\mathbb{R}$

x	$-\infty$
$F'(x)$	$+$
F	↗

4) a/ $F(x) = 2x - 1$ ssi $F(x) - 2x + 1 = 0$

On pose $h : x \longmapsto F(x) - 2x + 1$.

définie sur $\mathbb{R}$,

h dérivable sur $\mathbb{R}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$h'(x) = f(x) - 2 < 0$

$\left(\text{car } \frac{1}{1+x^2} \leq 1 < 2\right)$.

donc h est bijective de $\mathbb{R}$ sur $]-\infty, +\infty[$.

Comme $0 \in \mathbb{R}$, $h(x) = 0$ admet une seule solution α /

$$F(\alpha) = 2\alpha - 1.$$

b/ I.A.F.

Exercice 2

Soit $f(x) = \dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}$ pour $x \in [0, \pi[$.

1) f est dérivable sur $[0,\pi[$.

pour $x \in [0,\pi[$, on

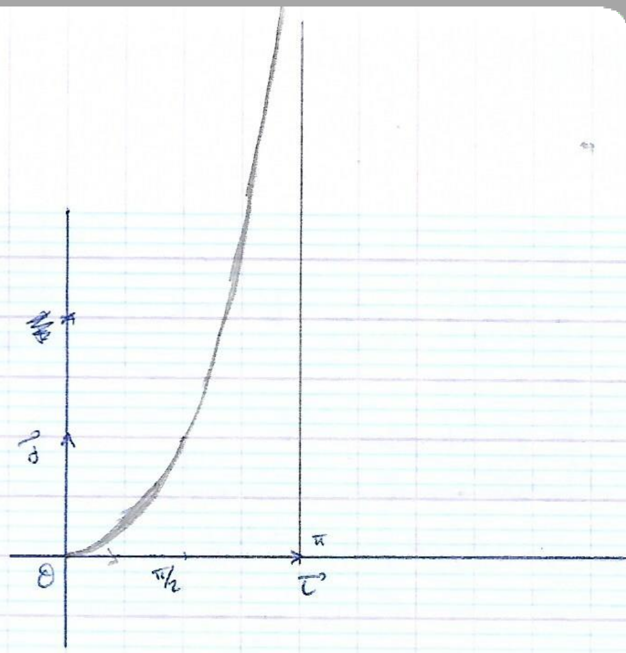
$$f'(x) = \frac{\sin x\,(1+\cos x) + (1-\cos x)\sin x}{(1+\cos x)^2}$$

$$= \frac{\sin x\,(1+\cos x + 1 - \cos x)}{(1+\cos x)^2}$$

$$= \frac{2\sin x}{(1+\cos x)^2} \geq 0.$$

x	0		π
$f'(x)$	0	$+$	
f	0	$\nearrow$	$+\infty$

$\lim\limits_{x \to \pi^-} f(x) = \lim\limits_{x \to \pi^-} \dfrac{1-\cos x}{1+\cos x} = +\infty.$



2) a/ f est continue et strictement croissante [sur] $[0,\pi[$. donc elle est bijective de $[0,\pi[$ sur $f([0,\pi[) = [0, +\infty[$.

Par suite elle admet une réciproque g de $[0,+\infty[$ vers $[0,\pi[$.

b) f est dérivable sur $]0,\pi[$ et $f'(x) \neq 0$ pour tout $x \in]0,\pi[$.

d'où g est dérivable sur $f(]0,\pi[) =]0,$

et on a $\forall x \in]0, +\infty[$,

$$g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))}$$

$$= \frac{1}{f'(y)}$$

$$= \frac{(1+\cos y)^2}{2\sin y}$$

On pose $\begin{cases} y = g(x) \iff f(y) = x. \\ y \in]0,\pi[\\ x \in]0,+\infty[. \end{cases}$

$\iff \dfrac{1-\cos y}{1+\cos y} = x$

$1 - \cos y = x + (\cos y).\, x$

$(x)+1) = 1 - x$

$$\cos^2 y = \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2$$

$$1-\sin^2 x = \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2$$

$$\sin^2 x = 1 - \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2$$

$$\sin^2 x = \frac{(1+x)^2-(1-x)^2}{(1+x)^2}$$

$$" = \frac{(1+\cancel{x}+1-\cancel{x})(\cancel{1}+x-\cancel{1}+x)}{(1+x)^2}$$

$$" = \frac{4x}{(1+x)^2}$$

$\sin y = \dfrac{2\sqrt{x}}{1+x}$. car $y \in]0,\pi[$ $\sin y > 0$.

$$g'(x) = \frac{(1+\cos y)^2}{2\sin y}$$

$$= \left(1+\frac{1-x}{1+x}\right)^2 \cdot \frac{1+x}{4\sqrt{x}}$$

$$= \left(\frac{2}{1+x}\right)^2 \cdot \frac{\cancel{1+x}}{\cancel{4}\sqrt{x}}$$

$$= \frac{1}{(1+x)\sqrt{x}}.$$

3) pour $n \in \mathbb{N}^*$, On pose

$$V_n = (n^2+n)\left[g\left(\frac{1}{n}\right) - g\left(\frac{1}{n+1}\right)\right].$$

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right] \subset [0,+\infty[$.

On a g continue sur $\left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right]$

dérivable " $\left]\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right[$.

D'après le Théorème des accroissements finis

il existe $U_n \in \left]\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right[$ /

$$g'(U_n) = \frac{g\left(\frac{1}{n+1}\right) - g\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}}.$$

$$\frac{1}{(1+U_n)\sqrt{U_n}} = (n^2+n)\cdot\left[g\left(\frac{1}{n}\right) - g\left(\frac{1}{n}\right)\right] = V_n.$$

$\frac{1}{n+1} < U_n < \frac{1}{n}$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

or $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0.$

$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} U_n = 0.$

d'où $\lim_{n\to+\infty} V_n$

$= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{(1+U_n)\sqrt{U_n}} = +\infty.$

Ex 3

1) On pose f_1 la fct. dont la represe[ntation] graphique est $(\mathcal{C})$, et f_2 " " (Γ).

On a f_1 et f_2 sont strictement monoto[nes] donc la dérivée est de signe constant[e]

d'où $f_1 = f$.
$f_2 = f'$.

2) f est strictement ~~monotone~~ decroissa[nte] sur $]0,+\infty[$.

donc elle réalise une bijection de]-o[...] vers $\mathbb{R}$.

d'où elle admet une réciproque défini[e] sur $\mathbb{R}$.

3) a/ $\begin{cases} f'(2) = -2 \\ f'(1) = -5 \end{cases}$

$\begin{cases} b + \frac{a}{4} = -2 \\ b + a = -5 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} b = -1 \\ a = -4 \end{cases}$

$f'(x) = -1 - \frac{4}{x^2}$ pour $x \in]0,+\infty[$

b) $\forall x \in]0,+\infty[$, $f'(x) = -1 - \frac{4}{x^2}$

donc $f(x) = -x + \frac{4}{x} + c$.

$= \frac{4 - x^2}{x} + c$.

$f(2) = 0 \iff c = 0$.

$f(x) = \frac{4 - x^2}{x} + c$.

* $f^{-1} : \mathbb{R} \longrightarrow]0,+\infty[$

$x \longmapsto f^{-1}(x) = y$.

$\begin{cases} f^{-1}(x) = y \iff f(y) = x. \\ x \in \mathbb{R} \\ y \in]0,+\infty[\end{cases}$

alors $\frac{4 - y^2}{y} = x$

ssi $4 - y^2 - xy = 0$

$y^2 + xy - 4 = 0$

$\Delta = x^2 + 16$.

$y = \frac{-x - \sqrt{x^2+16}}{2}$ ou $y = \frac{-x + \sqrt{x^2+16}}{2}$

On a $\forall x \in \mathbb{R}$,

$x^2 \leqslant x^2 + 16$.

ssi $\sqrt{x^2+16} \geqslant |x| \geqslant x$.

ssi $\sqrt{x^2+16} - x > 0$.

d'où $y = \frac{\sqrt{x^2+16} - x}{2}$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $f^{-1}(x) = \frac{\sqrt{x^2+16} - x}{2}$

4) On pose $g(x) = f \circ u(x)$

avec $u(x) = \frac{1}{\cos x}$, $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}[$.

a) g est dérivable sur $[0, \frac{\pi}{2}[$

pour $x \in [0, \frac{\pi}{2}[$,

$g'(x) = u'(x) \cdot f'(u(x))$.

$\left(\frac{1}{f}\right)' = \frac{f'}{f^2}$.

$= \frac{\sin x}{\cos^2 x} \cdot -1 \ldots$

x	0		$\pi/2$
$g'(x)$	0	$-$	
g	3	$\searrow$	$-\infty$

g est strictement décroissante sur $[0, \frac{\pi}{2}[$

donc elle réalise une bijection de $[0, \frac{\pi}{2}[$

sur $g([0, \frac{\pi}{2}[) =]-\infty, 3]$.

b) g est dérivable sur $]0, \frac{\pi}{2}[$ et pour $x \in$

$g'(x) \neq 0$

donc g^{-1} dérivable sur $g(]0, \frac{\pi}{2}[)$

$=]-\infty, 3[$.

de plus $g'_d(0) = 0$

donc $\mathscr{C}_g$ admet une demi tangente dirigée vers la droite en 0. Par raison de symétrie par rapport à $\Delta : y = x$, $\mathscr{C}_{g^{-1}}$ admet une demi tangente dirigée vers le haut en $g^{-1}(0) =$

d'où g^{-1} n'est pas dérivable ~~à droite~~ en 3.

d'où $K =]-\infty, 3[$.

$(g^{-1})'(0) = \frac{-1}{4\sqrt{3}}$.