

A. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et f_n la fonction définie sur $] -1, +\infty[$ par $f_n(x) = x^n \text{Ln}(1+x)$

On désigne par (C_n) la courbe représentative de f dans un R.O.N (O, \vec{i}, \vec{j}) .

1) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in] -1, +\infty[$ on pose $\varphi_n(x) = n \text{Ln}(1+x) + \frac{x}{x+1}$.

a) Etudier les variations de φ_n .

b) Calculer $\varphi_n(0)$ en déduire le signe de $\varphi_n(x)$ pour tout $x \in] -1, +\infty[$.

2) a) Etudier les variations de f_1 .

b) Pour tout $n \geq 2$; Etudier les variations de f_n et dresser suivant la parité de n son tableau de variation.

c) Etudier la position relative des deux courbes (C_1) et (C_2) puis Tracer dans le même repère les courbes (C_1) et (C_2) .

3) a) Calculer les intégrales $I = \int_0^1 f_1(x) dx$ et $J = \int_0^1 f_2(x) dx$.

b) Calculer l'aire de la partie du plan limitée par les deux courbes (C_1) et (C_2) .

4) a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$; l'équation $f_n(x) = 1$ admet dans $[0, +\infty[$ une solution unique α_n .

b) Montrer que $\alpha_n > 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

c) Montrer que la suite (α_n) est décroissante.

B. Soit $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $v_n = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k+1}$

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_n = \int_0^1 f_n(x) dx$.

1) a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$; $(n+1)u_n = \text{Ln}2 - \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x} dx$.

b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$; $\frac{1}{2(n+2)} \leq \text{Ln}2 - (n+1)u_n \leq \frac{1}{n+2}$.

c) En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n+1)u_n$.

2) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x > -1$ on pose : $S_n(x) = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-x)^n$.

a) Montrer que $S_n(x) = \frac{1}{1+x} - \frac{(-1)^{n+1} x^{n+1}}{1+x}$.

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\text{Ln}2 - v_n = (-1)^{n+1} [\text{Ln}2 - (n+1)u_n]$

c) Montrer que la suite (v_n) est convergente et calculer sa limite.

Ex 1

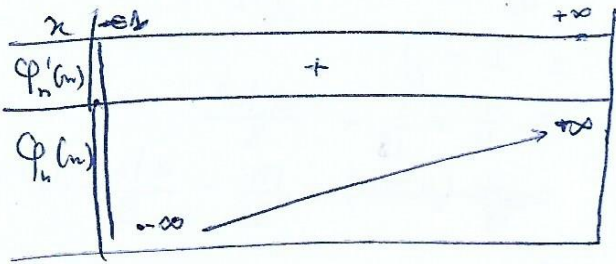
A/ pour $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n :]-1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto f_n(x) = x^n \ln(1+x)$

1) pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\varphi_n :]-1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto \varphi_n(x) = n \ln(1+x) + \frac{x}{x+1}$

a) φ_n est dérivable sur $]-1, +\infty[$

pour $x > -1$, On a:

$$\begin{aligned} \varphi_n'(x) &= n \cdot \frac{1}{1+x} + \frac{x+1-x}{(x+1)^2} \\ &= \frac{n}{1+x} + \frac{1}{(x+1)^2} > 0. \end{aligned}$$



b) $\varphi_n(0) = n \cdot \ln(1) + \frac{0}{0+1} = 0$.



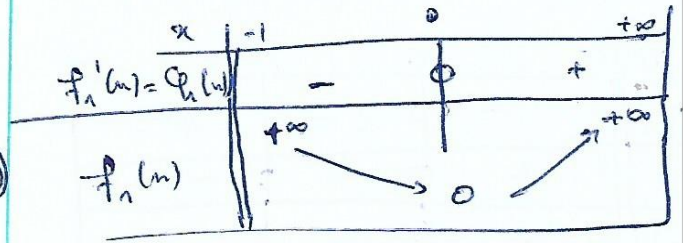
Car φ_n est croissante sur $]-1, +\infty[$,
 pour $x \in]-1, 0[$, $\varphi_n(x) < \varphi_n(0)$
 $\varphi_n(x) < 0$.

2/a) $f_n :]-1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto f_n(x) = x \cdot \ln(1+x)$

f_n est dérivable sur $]-1, +\infty[$.

pour $x > -1$,

$$\begin{aligned} f_n'(x) &= \ln(1+x) + \frac{x}{1+x} \\ &= \varphi_1(x). \end{aligned}$$



b) pour $n \geq 2$, On a:

~~Si n est pair~~

$f_n(x) = x^n \cdot \ln(1+x)$

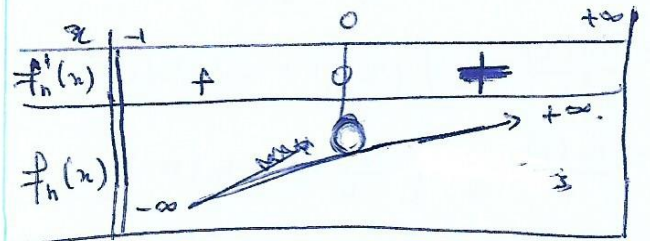
f_n est dérivable sur $]-1, +\infty[$.

On a pour $x > -1$:

$$\begin{aligned} f_n'(x) &= n \cdot x^{n-1} \cdot \ln(1+x) + \frac{x^n}{1+x} \\ &= x^{n-1} \left(n \ln(1+x) + \frac{x}{1+x} \right) \\ &= x^{n-1} \cdot \varphi_n(x). \end{aligned}$$

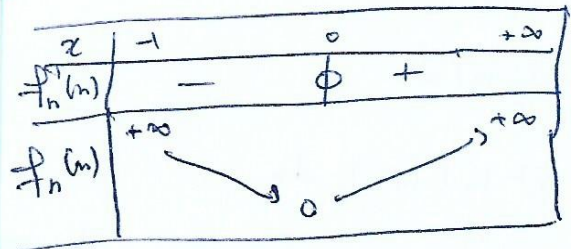
* Si n est pair, $(n-1)$ est impair.

Donc x^{n-1} a le même signe de x .



* Si n est impair, $(n-1)$ est pair.

Donc $x^{n-1} > 0$.



c) pour $x > -1$,

$$\begin{aligned} f_n(x) - f_2(x) &= x \cdot \ln(1+x) - x^2 \ln(1+x) \\ &= x (\ln(1+x) - x \ln(1+x)) \end{aligned}$$

~~$f_n(x) - f_2(x) = x \ln(1+x) - x^2 \ln(1+x)$~~

~~$= x (\ln(1+x) - x \ln(1+x))$~~

~~$= x \ln(1+x) - x^2 \ln(1+x)$~~

~~$= x \ln(1+x) - x^2 \ln(1+x)$~~



$$f_1(x) - f_2(x) = x \ln(1+x) (4-x)$$

x	-1	0	1	+∞
x	-	0	+	+
1-x	+	0	+	-
f_1(1+x)	-	0	+	+
f_1(x) - f_2(x)	+	0	+	-

Donc sur $]-1, 1[$, (C_1) au-dessus de (C_2) .
et sur $]1, +\infty[$, (C_1) au-dessous de (C_2) .

$$3/a) I = \int_0^1 f_1(x) dx = \int_0^1 x \ln(1+x) dx$$

On pose $u(x) = \ln(1+x)$, $u'(x) = \frac{1}{1+x}$
 $v'(x) = x$, $v(x) = \frac{x^2}{2}$

$$I = \left[\frac{x^2}{2} \cdot \ln(1+x) \right]_0^1 - \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{x^2}{1+x} dx$$

$$I = \frac{\ln(2)}{2} - \frac{1}{2} \int_0^1 \left(\frac{(x-1)(x+1)}{x+1} + \frac{1}{x+1} \right) dx$$

$$I = \frac{\ln(2)}{2} - \frac{1}{2} \int_0^1 \left(x - 1 + \frac{1}{1+x} \right) dx$$

$$I = \frac{\ln(2)}{2} - \frac{1}{2} \left[\frac{x^2}{2} - x + \ln(1+x) \right]_0^1$$

$$I = \frac{\ln(2)}{2} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - 1 + \ln(2) - 0 \right)$$

$$I = \frac{1}{4}$$

$$+ J = \int_0^1 f_2(x) dx = \int_0^1 x^2 \ln(1+x) dx$$

On pose $u(x) = \ln(1+x)$, $u'(x) = \frac{1}{1+x}$
 $v'(x) = x^2$, $v(x) = \frac{x^3}{3}$

$$J = \left[\frac{x^3 \ln(1+x)}{3} \right]_0^1 - \frac{1}{3} \int_0^1 \frac{x^3}{1+x} dx$$

$$= \frac{\ln(2)}{3} - \frac{1}{3} \int_0^1 x(x-1+x+1) dx$$

$$= \frac{\ln(2)}{3} - \frac{1}{3} \int_0^1 (x^2 - 1) dx$$

$$J = \frac{\ln(2)}{2} - \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 1 - \ln(2) - 0 \right)$$

$$= -\frac{1}{3} \left(\frac{5}{6} \right) + \frac{2}{3} \ln(2)$$

$$= \frac{-5}{18} + \frac{2 \ln(2)}{3}$$

b/ Puisque (C_1) et (C_2) se coupent aux points 0 et 1.

$$CA = \int_0^1 (f_1(x) - f_2(x)) dx$$

$$= \int_0^1 f_1(x) dx - \int_0^1 f_2(x) dx$$

$$= I - J$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{5}{18} - \frac{2 \ln 2}{3}$$

$$= \frac{19}{36} - \frac{2 \ln 2}{3}$$

4) a/ pour $n \in \mathbb{N}^*$,
 f_n est strictement croissante sur $[0, +\infty[$.
Donc elle est bijective de $[0, +\infty[$ sur $f_n([0, +\infty[)$.

f_n étant continue sur $[0, +\infty[$.

$$f_n([0, +\infty[) = [f_n(0), \lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x)) = \mathbb{R}^+$$

Comme $0 \in \mathbb{R}^+$,
 $f_n(x) = 0$ admet une unique solution sur $[0, +\infty[$.

b/ $f_n(x) = 1^n \cdot \ln(2) = \ln(2)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$

Comme $\ln(2) > 0$, alors $f_n(x) = \ln(2)$ n'a pas de solution sur $[0, +\infty[$.

car f_n est strictement croissante sur $[0, +\infty[$.

c) pour $x > 1$ et $n \in \mathbb{N}^*$,

$$f_{n+1}(x) - f_n(x) = x^n \cdot \ln(1+x)(n-2) > 0.$$

D'où $f_{n+1}(x) > f_n(x)$ pour $n > 1$.

* on a: $f_{n+1}(\alpha_{n+1}) = 0$; $\alpha_{n+1} > 1$; $n \in \mathbb{N}^*$

$$f_n(\alpha_n) = 0; \alpha_n > 1; n \in \mathbb{N}^*.$$

Supposons que $\alpha_{n+1} \geq \alpha_n$; $n \in \mathbb{N}^*$.

f_n est croissante sur $[1, +\infty[$.

$$\text{Donc } f_n(\alpha_{n+1}) \geq f_n(\alpha_n).$$

$$\text{or } f_{n+1}(\alpha_{n+1}) > f_n(\alpha_{n+1})$$

$$\text{sig } \begin{cases} f_n(\alpha_{n+1}) \geq 0 \\ f_n(\alpha_{n+1}) < 0 \end{cases} \text{ Contradiction}$$

D'où $\alpha_{n+1} < \alpha_n$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

D'où $(\alpha_n)_k$ est décroissante.

B / pour $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k+1}$

pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \int_0^1 f_n(x) dx$.

1) a) pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \int_0^1 f_n(x) dx \leq$

On pose $k(x) = \int_0^1 x^n \cdot \ln(1+x) dx$

$k(x) = \ln(1+x)$, $k'(x) = \frac{1}{1+x}$

$h(x) = x^n$, $h'(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1}$.

$$u_n = \frac{n}{n+1} \cdot \left[x^{n+1} \cdot \ln(1+x) \right]_0^1 - \frac{1}{n+1} \cdot \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x} dx$$

$$(n+1)u_n = \ln(2) - \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x} dx.$$

b) pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n(n+1) = \ln(2) - \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x} dx$

$$\ln(2) - u_n(n+1) = \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x} dx$$

pour $x \in (0, 1]$, On a:

pour $n \in \mathbb{N}^*$,

Les fonctions $x \mapsto \frac{x^{n+1}}{2}$ continues sur $[0, 1]$

$$x \mapsto x^{n+1} \quad u \quad z$$

et $0 < x$.

$$\text{D'où } \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{2} dx \leq \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x} dx \leq \int_0^1 x^{n+1} dx$$

$$\frac{1}{2} \left[\frac{x^{n+2}}{n+2} \right]_0^1 \leq \ln(2) - (n+1)u_n \leq \left[\frac{x^{n+2}}{n+2} \right]_0^1$$

$$\frac{1}{2(n+2)} \leq \ln(2) - (n+1)u_n \leq \frac{1}{n+2}$$

c) pour $n \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{2(n+2)} \leq \ln(2) - (n+1)u_n \leq$

soit $-\ln(2) + \frac{1}{2(n+2)} \leq -u_n \times (n+1) \leq \frac{1}{n+2} -$

avec $(n+1) < 0$.

$$A = \frac{-1}{(n+2)(n+1)} + \frac{\ln(2)}{(n+2)} \leq u_n \leq \frac{\ln(2)}{n+2} - \frac{1}{2(n+2)(n+1)} = B$$

Donc $A \leq u_n \leq B$.

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} A = \lim_{n \rightarrow +\infty} B = 0$.

alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \times (n+1) = \ln(2)$.

2) pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x > -1$,

$$S_n(x) = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-x)^n$$

~~$$S_n(x) = \frac{1 - (-x)^{n+1}}{1+x}$$~~

a) pour $n \in \mathbb{N}^*$, $x > -1$; On a:

(1) $S_n(x) = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-x)^n$

(2) $(-x) \times S_n(x) = -x + x^2 - x^3 + \dots + (-x)^n + (-x)^{n+1}$

(1) - (2): $(1+x)S_n(x) = 1 - (-x)^{n+1}$; $x+1 \neq 0$.

$$S_n(x) = \frac{1}{1+x} - \frac{(-x)^{n+1}}{1+x}$$

$$S_n(x) = \frac{1}{1+x} - \frac{(-1)^{n+1}(x)^{n+1}}{1+x}$$

b) pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$v_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k \cdot \frac{1}{k+1}$$

$$v_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k \cdot \left[\frac{x^{k+1}}{k+1} \right]_0^1$$

$$v_n = \int_0^1 1 dx - \int_0^1 x dx + \int_0^1 x^2 dx - \dots$$

$$+ \int_0^1 (-x)^n dx.$$

$$v_n = \int_0^1 \sum_{k=0}^n (1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-x)^k) dx$$

$$v_n = \int_0^1 S_n(x) dx$$

$$v_n = \int_0^1 \left(\frac{1}{1+x} - \frac{(-1)^{n+1} \cdot x^{n+1}}{1+x} \right) dx$$

$$v_n = \left[\ln(1+x) \right]_0^1 - (-1)^{n+1} \cdot \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x} dx$$

$$v_n = \ln 2 + (-1)^{n+1} \cdot ((n+1)u_n - \ln 2)$$

Donc $\ln 2 - v_n = (-1)^{n+1} (\ln 2 - (n+1)u_n)$.

pour $n \in \mathbb{N}$.

$$c/ \lim_{n \rightarrow +\infty} (\ln 2 - v_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} (-1)^{n+1} [\ln 2 - (n+1)u_n]$$

$$= 0$$

car $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n+1)u_n = \ln 2$.

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \ln 2$.

