Lycée pilote de Bizerte	Serie d'exercices n°33 4éme Math	Prof:M.Benali

Probleme :

A 1) Soit f la fonction definie sur IR par : $f(x)=\dfrac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}}$

a) Montrer que pour tout $x\in IR$, $|f(x)|<1$.

b) Montrer que pour tout $x \in IR$, $f'(x)=1-[f(x)]^2$.

c) Montrer que f realise une bijection de IR sur un intervalle J que l'on precisera .

d) Expliciter $f^{-1}(x)$ pour tout $x\in J$.

2) Soit g la fonction definie sur IR par : $g(x)=Ln\left(\dfrac{e^{x}+e^{-x}}{2}\right)$

a) Etudier les variations de g.

b) Montrer que la droite D: $y = x - Ln2$ est une asymptote oblique a la courbe C_g au voisinage de $+\infty$.

c) Tracer C_g dans un repere orthonorme $(O,\vec{i},\vec{j})$.

B Soit F la fonction definie sur $]0,+\infty[$ par : $F(x)=\displaystyle\int_{1}^{g(x)}\frac{1}{\sqrt{1-e^{-2t}}}\,dt$

1) Montrer que F est derivable sur $]0,+\infty[$ et calculer $F'(x)$.

2) a) Soit α un reel stictement positif .Resoudre dans $]0,+\infty[$ l'equation : $g(x)=\alpha$.

b) Montrer que pour tout $x \in]0,+\infty[$, $F(x)=x-Ln\left(e+\sqrt{e^2-1}\right)$

c) Calculer alors l'integrale $I=\displaystyle\int_{1}^{Ln2}\frac{1}{\sqrt{1-e^{-2t}}}dt$

C Soit x un reel positif , pour tout $n \in IN$, on pose : $I_0(x)=x$ et pour tout $n\geq 1$, $I_n(x)=\displaystyle\int_0^x[f(t)]^n\,dt$.

1) Justifier ,pour tout $n\geq 1$,l'existence de $I_n(x)$.

2) Calculer $I_1(x)$ et $I_2(x)$ en fonction de x .

3) a) Montrer que pour tout $n\geq 1$, on a : $0\leq I_n(x)\leq x[f(x)]^n$

b) En deduire : $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n(x)$.

4) a) Montrer que pour tout $n\geq 0$, on a : $I_{n+2}(x)=I_n(x)-\dfrac{1}{n+1}[f(x)]^{n+1}$ (on pourra utiliser A 1 b)

b) En deduire que pour tout $n\geq 1$, on a :

$$I_{2n}(x)=x-\left[f(x)+\frac{1}{3}[f(x)]^3+\frac{1}{5}[f(x)]^5+\dots\dots\dots+\frac{1}{2n-1}[f(x)]^{2n-1}\right]$$

c) Montrer alors que ,pour tout x de $[0,1[$ on a :

$$x+\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5+\dots\dots+\frac{1}{2n-1}x^{2n-1}=f^{-1}(x)-I_{2n}\left[f^{-1}(x)\right]$$

d) Soit u la suite definie sur IN par : $u_n=\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3.3^3}+\dots\dots\dots+\dfrac{1}{(2n-1).3^{2n-1}}$

Deduire : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Série 33

Ex 1) Problème

A/ 1) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

a/ pour $x \in \mathbb{R}$,

$f(x) - 1 = \frac{\cancel{e^x} - e^{-x} - \cancel{e^x} - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

$= \frac{-2e^{-x}}{e^x + e^{-x}} < 0.$

$f(x) - (-1) = \frac{e^x - \cancel{e^{-x}} + e^x + \cancel{e^{-x}}}{e^x + e^{-x}}$

$= \frac{2e^x}{e^x + e^{-x}} > 0.$

D'où $f(x) > -1$ et $f(x) < -1$.

" $|f(x)| < 1$.

b/ f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

pour $x \in \mathbb{R}$,

$f'(x) = \frac{(e^x - (-1).e^{-x})(e^x + e^{-x}) - (e^x - e^{-x})^2}{(e^x + e^{-x})^2}$

$= 1 - f^2(x).$

c/ pour $x \in \mathbb{R}$, $|f(x)| < 1$

alors $f^2(x) < 1$

$1 - f^2(x) > 0.$

$f'(x) > 0.$

D'où f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

" f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers $f(\mathbb{R})$.

f étant continue sur $\mathbb{R}$,

$f(\mathbb{R}) =]\lim_{-\infty} f, \lim_{+\infty} f[$.

avec $\lim_{-\infty} f = \lim_{x \to -\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

$= \lim_{x \to -\infty}$ ...

et $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}}$

$= 1.$

D'où $f(\mathbb{R}) =]-1, 1[= J$.

f est bijective de $\mathbb{R}$ vers $]-1, 1[= J$.

d/ On pose $\begin{cases} f^{-1}(x) = y & \text{ssi } f(y) = x. \\ x \in]-1, 1[\\ y \in \mathbb{R} \end{cases}$

On a $x = \frac{e^y - e^{-y}}{e^y + e^{-y}}$.

ssi $x = \frac{1 - e^{-2y}}{1 + e^{-2y}}$.

ssi $x + x.e^{-2y} - 1 + e^{-2y} = 0.$

$e^{-2y}(x+1) = 1 - x.$

$e^{-2y} = \frac{1-x}{x+1}$

$-2y = \ln\left(\frac{1-x}{x+1}\right).$

$y = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right).$

pour $x \in]-1, 1[$, $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right).$

2/ $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto g(x) = \ln\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right).$

a/ Les fonctions: $x \mapsto \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ positive strictem[ent]
et dérivable sur [$\mathbb{R}$]
$x \mapsto \ln x$ dérivable sur $]0$[...]

Donc g est dérivable sur $\mathbb{R}$.

pour $x \in \mathbb{R}$,

$g'(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{\cancel{2}} \cdot \frac{\cancel{2}}{e^x + e^{-x}}$

$= f(x)$. (voir la question 1/c)

b/ $\lim_{x \to +\infty} g(x) - x + \ln 2 = \lim_{x \to +\infty} \ln\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right) - x + [\ln 2]$

$= \lim_{x \to +\infty} \ln\left(e^x(1 + e^{-2x})\right) -$ ...

... $\cancel{x} + \ln(1 + e^{-2x}) -$ ...

D'où la droite $D : y = x - \ln 2$ est une asymptote oblique à $\mathscr{C}_g$ au voisinage de $(+\infty)$.

2/a/ On remarque que si $x \in \mathbb{R}$, $-x \in \mathbb{R}$.

pour $x \in \mathbb{R}$, $g(-x) = \ln\left(\frac{e^{-x}+e^{x}}{2}\right)$

$= g(x)$.

Donc g est paire.

Son domaine d'étude se réduit à $[0,+\infty[$.

pour $x \geq 0$, $g'(x) = f(x)$

$= \frac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}}$

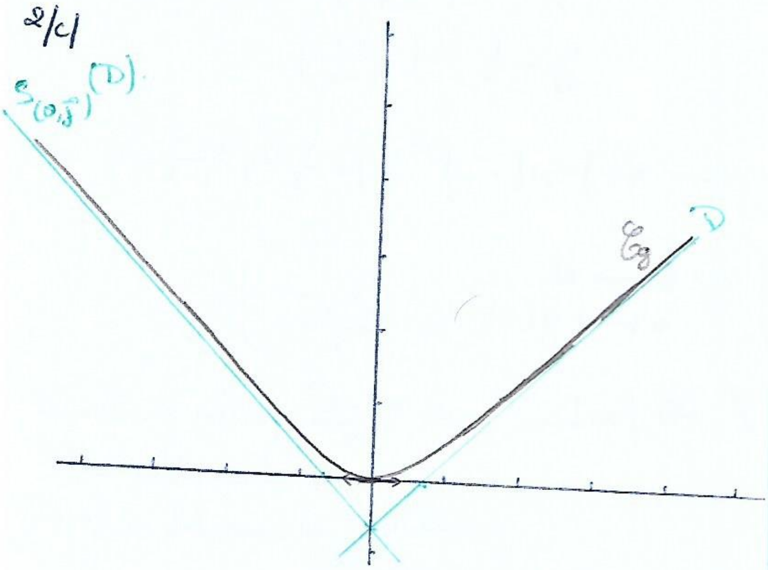
On a $x \geq 0$ et $-x \leq 0$.

$e^{x} \geq 1$ et $e^{-x} \leq 1$

$e^{x} - e^{-x} \geq 0$.

x	0		$+\infty$
$g'(x)$	0	$+$	
$g(x)$	0	$\nearrow$	$+\infty$

2/c/



B/ $F :]0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto F(x) = \int_{1}^{g(x)} \frac{1}{\sqrt{1-e^{-2t}}}\,dt$.

1) La fonction $t \mapsto 1-e^{-2t}$ est ~~dérivable~~ continue et strict…

D'où " " $t \mapsto$ …

La fonction g dérivable sur $]0,+\infty[$.

pour $x > 0$, $g(x) \in]0,+\infty[$ et $1 \in]0$…

D'où F est dérivable sur $]0,+\infty[$.

Pour $x > 0$,

$F'(x) = g'(x) \times \frac{1}{\sqrt{1-e^{-2g(x)}}}$

$= \frac{f(x)}{\sqrt{1-e^{-2\ln\left(\frac{e^{x}+e^{-x}}{2}\right)}}}$

$= \frac{e^{x}-e^{-x}}{(e^{x}+e^{-x}).\sqrt{1-\left(\frac{e^{x}+e^{-x}}{2}\right)^{-2}}}$

$= \frac{e^{x}-e^{-x}}{\cancel{(e^{x}+e^{-x})}\sqrt{1-\frac{4}{(\cancel{e^{x}+e^{-x}})^{2}}}}$

$= \frac{e^{x}-e^{-x}}{\sqrt{e^{2x}+e^{-2x}+2-4}}$

$= \frac{e^{x}-e^{-x}}{\sqrt{(e^{x}-e^{-x})^{2}}}$; $e^{x}-e^{-x} > 0$ pour $x > 0$.

$= 1$.

2/ Soit $\alpha > 0$.

pour $x \in]0,+\infty[$; $g(x) = \alpha$

ssi $\ln\left(\frac{e^{x}+e^{-x}}{2}\right) = \alpha$.

ssi $e^{x}+e^{-x} = 2e^{\alpha}$

ssi $e^{2x}+1-2e^{\alpha}.e^{x} = 0$.

$e^{2x} - 2.e^{\alpha}.e^{x} + 1 = 0$

$\Delta = 4e^{2\alpha} - 4$.

$= 2^{2}(e^{2\alpha}-1)$

$e^{x} = \frac{2e^{\alpha} - 2\sqrt{e^{2\alpha}-1}}{2}$ ou $e^{x} = \frac{2e^{\alpha} + 2\sqrt{e^{2\alpha}-1}}{2}$

$e^{x} = e^{\alpha} - \sqrt{e^{2\alpha}-1}$ ou $e^{x} = e^{\alpha} + \sqrt{e^{2\alpha}-1}$.

$x = \ln\left(e^{\alpha} - \sqrt{e^{2\alpha}-1}\right)$ ou $x = \ln\left(e^{\alpha} + \sqrt{e^{2\alpha}-1}\right)$

On a $\alpha > 0$ ssi $e^{2\alpha} > 1$

$e^{2\alpha} - 1 > 0$. et $e^{\alpha} > 1$.

par suite $\sqrt{e^{2\alpha}-1} + e^{\alpha} > 1$.

$a_1 = \ln(e^{\alpha} + \sqrt{e^{2\alpha}-1}) > 0$.

donc a_1 vérifie la solution désirée $g(x)=\alpha$ avec $\alpha > 0$ et $x > 0$.

Or g est strictement croissante de $]0,+\infty[$ vers $\mathbb{R}_+^*$. et $a_1 \in]0,+\infty[$.

d'où a_1 est la seule solution /

$g(x) = \alpha$, $\alpha \in]0,+\infty[$

b/ pour $x \in]0,+\infty[$, $F'(x) = 1$

donc $F(x) = x + c$; c constante réelle.

On a $g(x) = 1$ ~~alors~~ $x = \ln(e^{1} + \sqrt{e^2-1})$.

$x = \ln(e + \sqrt{e^2-1})$.

$F(\ln(e+\sqrt{e^2-1})) = \int_1^1 \frac{1}{\sqrt{1-e^{-2t}}} dt = 0$.

D'où $\ln(e + \sqrt{e^2-1}) + c = 0$

$c = -\ln(e+\sqrt{e^2-1})$.

$\Rightarrow$ pour $x \in]0,+\infty[$, $F(x) = x - \ln(e + \sqrt{e^2-1})$.

c/ On pose $g(x) = \ln 2$; $x > 0$.

alors $x = \ln\left(e^{\ln 2} + \sqrt{e^{2\ln 2} - 1}\right)$

$= \ln(2 + \sqrt{3})$.

$I = \int_1^{\ln 2} \frac{1}{\sqrt{1-e^{-2t}}} dt$

$= \int_1^{g(\ln(2+\sqrt3))} \frac{1}{\sqrt{1-e^{-2t}}} dt$

$= F(\ln(2+\sqrt3))$

$= \ln(2+\sqrt3) - \ln(e + \sqrt{e^2-1})$.

$= \cancel{\ln\left(\frac{2+\sqrt3}{e+\sqrt{e^2-1}}\right)}$.

$= \ln\left(\frac{2+\sqrt3}{\ldots}\right.$

C/ $n \in \mathbb{N}$.

$I_n : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$

$x \mapsto \begin{cases} I_0(x) = x \\ I_n(x) = \int_0^x [f(t)]^n dt \text{ pour} \end{cases}$

1) pour $n \geq 1$, $I_n(x) = \int_0^x f^n(t)\, dt$; $x \geq$

Comme f est dérivable donc continue sur $[0,+\infty[$.

pour $n \in \mathbb{N}^*$, f^n est continue sur $[0,+\infty[$.

D'où l'existance de I_n.

2/ $I_1(x) = \int_0^x f(t)\, dt$; $g'(x) = f(x)$ pour x

$= [g(x)]_0^x$; $g(0) = 0$.

$= \ln\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)$.

$I_2(x) = \int_0^x f^2(t)\, dt$

$= \int_0^x (1 - f'(t))\, dt$

$= [t - f(t)]_0^x$

$= x - \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

3/ pour $n \geq 1$, On pose $0 \leq t \leq x$

f strictement croissante sur $[0,+\infty[$.

$0 = f(0) \leq f(t) \leq f(x)$

$0 \leq f^n(t) \leq f^n(x)$; $0 \leq x$.

$0 \leq \int_0^x f^n(t)\, dt \leq f^n(x) . \int_0^x dt$

$0 \leq I_n \leq x . f^n(x)$.

b/ On a pour $x \in \mathbb{R}$, $|f(x)| < 1$

donc $\lim_{n \to +\infty} f^n(x) = 0$.

D'où $\lim_{n \to +\infty} I_n(x) = 0$.

4/ pour $n = 0$, $I_{0+2} = x - f(x)$

$= I_0 - \frac{1}{0+1} . f^{0+1}(x)$.

pour $n \geq 1$, $I_{n+2} = \int_0^x f^{n+2}(t)\, dt$

$= \int_0^x (1 - f'(t)) f^n(t)\, dt$

$= I_n - \left[\frac{f^{n+1}}{n+1}\right.$

$= I_n - \frac{1}{\ldots} . f^{n+1}$

b/ pour $n=1$;

$$I_2 = x - f(x)$$

La propriété est vraie pour $n=1$.

pour $n\in\mathbb{N}^*$, Supposons que $I_{2n}(x) = x - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k-1} f^{2k-1}(x)$

Mq $I_{2n+2}(x) = x - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{2k-1} f^{2k-1}(x)$

On a $I_{2n+2}(x) = I_{2n}(x) - \frac{1}{2n+1} \cdot f^{2n+1}(x)$

$$= x - \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k-1} f^{2k-1}(x)\right) - \frac{1}{2(n+1)-1} \cdot f^{2(n+1)-1}(x)$$

$$= x - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{2k-1} \cdot f^{2k-1}(x)$$

Conclusion pour $n\in\mathbb{N}^*$,

$$I_{2n}(x) = x - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k-1} \cdot f^{2k-1}(x).$$

c/ $f^{-1}(x) - I_{2n}(f^{-1}(x))$

$$= \cancel{f^{-1}(x)} - \cancel{f^{-1}(x)} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k-1} \cdot f^{2k-1}(f^{-1}(x))$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{x^{2k-1}}{2k-1}.$$

$$= x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \dots + \frac{1}{2n-1} \cdot x^{2n-1}.$$

d/ pour $n\in\mathbb{N}^*$,

$$u_n = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^3 + \frac{1}{5}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^5 + \dots + \frac{1}{2n-1}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{2n-1}$$

$$= f^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) - I_{2n}(f^{-1}(x))$$

On a $\lim_{n\to+\infty} I_{2n} = \lim_{n\to+\infty} I_n = 0$.

d'où $\lim_{n\to+\infty} u_n = f^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)$.

$$= \frac{1}{2} \cdot \ln\left(\frac{1+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}\right)$$

$$= \ln(\sqrt{2}).$$