Lycée pilote de Bizerte	Serie d'exercices n°36 4éme Math	Prof:M.Benali

Exercice 1 :

On considére dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ *l'équation* $(E): 5x-3y=11$.

1)a) *Verifier que si* (x,y) *est une solution de* (E) *alors* $x\equiv 1 \pmod 3$.

b) *En déduire une solution particulére de* (E) *puis resoudre* (E).

2) *Soit* n *un entier .On pose* $a=3n+1$ *et* $b=5n-2$ *et on désigne par* $d=a\wedge b$.

a) *Vérifier que* (a,b) *est une solution de* (E). *Quelles sont les valeurs possibles de* d.

b) *Soit* Γ *l'ensemble des entiers vérifiant* $\begin{cases} 3n+1\equiv 0 \bmod (11) \\ 5n-2\equiv 0 \bmod (11) \end{cases}$

Montrer qu'un entier $n\in\Gamma$ *si et seulement si* $n\equiv 7 \bmod (11)$.

c) *En déduire les entiers naturels* n *pour les quels* a *et* b *sont premiers entre eux.*

3) *Montrer que les entiers* $(3\times 1431^{2019}+1)$ *et* $(5\times 1431^{2019}-2)$ *sont premiers entre eux.*

Exercice 2 :

1)a) *Déterminer deux entiers* u *et* v *tels que* $8u-81v=1$.

b) *Resoudre dans* $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ *l'équation* $(E): 8x-81y=65$.

2) *Déterminer le plus petit entier naturel* n *tel que :* $\begin{cases} n\equiv 5 (\bmod (8)) \\ n\equiv 70 (\bmod (81)) \end{cases}$

3) *Déterminer le couple* (a,b) *d'entiers naturels premiers entre eux vérifiant :* $\begin{cases} a\vee b=5543 \\ 8a-81b=65 \end{cases}$

Exercice 3 :

1)a) *Montrer que* $6^{40}\equiv 1 \bmod (11)$ *et que* $6^{40}\equiv 1 \bmod (5)$.

b) *Déterminer le reste modulo 55 de* $6^{\ldots}$ [illegible].

2) *Soient* a *et* b *deux entiers naturels tels que* $a^{17}\equiv b (\bmod 55)$ *et* $a^{40}\equiv 1 \bmod (55)$

Montrer que $b^{33}\equiv a \bmod (55)$ *en déduire le reste modulo 55 de* b^{2640}.

3) *Soit dans* $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ *l'équation* $(E): 17x-40y=1$.

a) *Montrer que si* (x,y) *est une solution de* (E) *alors* $x\equiv 33 (\bmod 40)$.

b) *En déduire une solution particulére de* (E) *puis resoudre* (E).

c) *Déterminer les couples d'entiers* (x,y) *tels que* $17x-40y=7$ *et* $x\wedge y=7$.

Exercice 4 :

1)a) *Déterminer suivant l'entier naturel* n *le reste modulo 8 de* 3^n.

b) *En déduire que l'entier* $A_n=3^{2n}-1$ *est divisible par 8.*

c) *Déterminer le reste modulo 8 de* $(2011^{2010}+2013^{2011})$.

2) *Soit dans* $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ *l'équation* $(E): A_3x+A_2y=24$.

a) *Montrer que les solutions de* (E) *sont les couples* (x,y) *tels que* $x=10k+3,\ y=-91k-27, k\in\mathbb{Z}$

b) *Montrer que* $x\wedge y=3$ *si et seulement si* $k\equiv 0 \bmod (3)$.

c) *En déduire les solutions* (x,y) *de* (E) *tels que* $x\wedge y=3$ *et* $-510\leq x+y\leq 867$.

Série 36

Ex 1

Soit (E) : $5x - 3y = 11$ dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$.

1) a/ Si (x, y) est une solution de (E)

alors $5x - 3y = 11$

$5x = 11 + 3y$

$5x \equiv 11 \pmod 3$.

$5x \equiv 20 \pmod 3$

$5(x-4) \equiv 0 \pmod 3$, $3 \wedge 5 = 1$

alors $x - 4 \equiv 0 \pmod 3$

$x \equiv 1 \pmod 3$.

b/ Si (x, y) est une solution de (E)

alors $x = 3k+1$, $k \in \mathbb{Z}$.

pour $k = 0$, $x = 1$.

$5\times 1 - 3y = 11$

ssi $3y = 5 - 11 = -6$

$y = -2$.

Donc $(1, -2)$ est une solution particulière de (E).

$5x - 3y = 5\times 1 - 3\times(-2)$

$5(x-1) = -3(-2-y)$.

$-3 \mid -3(-2-y)$ ssi $-3 \mid 5(x-1)$.

or $-3 \wedge 5 = 1$.

alors $-3 \mid x-1$

d'où $x - 1 = -3k$, $k \in \mathbb{Z}$.

$x = 1 - 3k$, $k \in \mathbb{Z}$.

$5(1 - 3k - 1) = -3(-2-y)$

$5k = -2 - y$

$y = -2 - 5k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Réciproquement, Si x [illegible]

[illegible]

$S_{\mathbb{Z}^2} = \{(1-3k, -2-5k),\ k \in \mathbb{Z}\}$.

2/ Soit $n \in \mathbb{Z}$.

On pose $a = 3n+1$, $b = 5n-2$.

$d = a \wedge b$.

a/ $5\times(3n+1) - 3(5n-2)$

$= 15n + 5 - 15n + 6$

$= 11$.

donc $(3n+1, 5n-2)$ solution de (E).

$d \mid a$ et $d \mid b$ alors $d \mid 5a - 3b$

$d \mid 11$.

donc $d \in \{1, 11\}$.

b/ $\Gamma = \left\{ n \in \mathbb{Z} \ / \ 3n+1 \equiv 0 \pmod{11} \text{ et } 5n - 2 \equiv 0 \pmod{11} \right\}$

$n \in \Gamma$ ssi $\begin{cases} 3n+1 \equiv 0 \pmod{11} \\ 5n - 2 \equiv 0 \pmod{11} \end{cases}$

ssi $\begin{cases} 3n - 21 \equiv 0 \pmod{11}. \\ 5n - 35 \equiv 0 \pmod{11}. \end{cases}$

ssi $\begin{cases} 3(n-7) \equiv 0 \pmod{11} \\ 5(n-7) \equiv 0 \pmod{11} \end{cases}$

or $11 \wedge 3 = 1$ et $11 \wedge 5 = 1$.

donc $n - 7 \equiv 0 \pmod{11}$.

$n \equiv 7 \pmod{11}$.

(We could be limited to just one equat[illegible]

Réciproquement, Si $n \equiv 7 \pmod{11}$.

$3n \equiv 21 \pmod{11}$

$3n+1 \equiv 22 \pmod{11}$

$\equiv 0 \pmod{11}$.

et $5n \equiv 35 \pmod{11}$.

$5n - 2 \equiv 33 \pmod{11}$

$\equiv 0 \pmod{11}$.

Donc, $n \in \Gamma$ ssi $n \equiv 7$ [illegible]

$a \wedge b = 1$ ssi $a \wedge b \neq 11$.

donc $n \notin \Gamma$.

$n \not\equiv 7 \pmod{11}$.

$n \neq 11k + 7$, $k \in \mathbb{Z}$.

3/ $a = 3 \times 1431^{2019} + 1$ et $b = 1431^{2019} \times 5 - 2$.

$n = 1431^{2019}$.

On a $1431 \equiv 1 \pmod{11}$.

$1431^{2019} \equiv 1 \pmod{11}$.

donc $n \notin \Gamma$.

$\Rightarrow$ a et b sont premiers entre eux.

Ex 2/

a) a/ $8u - 81v = 1$.

$71 \times 8 - 81 \times 7 = 1$.

Donc $(71, 7)$ est une solution particulière de (E').

b/ Soit (E) : $8x - 81y = 65$.

On a $8 \times 71 - 81 \times 7 = 1$

donc $8 \times 65 \times 71 - 81 \times 65 \times 7 = 65$

$8 \times 4615 - 81 \times 455 = 65$.

$(4615, 455)$ est une solution particulière de (E).

(x, y) solution de (E) alors :

$8x - 81y = 8 \times 4615 - 81 \times 455$

$8(x - 4615) = 81(y - 455)$.

On a $81 \mid 81(y - 455)$ donc $81 \mid 8(x - 4615)$.

or l'équation (E') : $8u - 81v = 1$ admet une solution. D'après le théorème de Bezout ;

$81 \wedge 8 = 1$.

Par suite $81 \mid x - 4615$.

donc $x - 4615 = 81k$; $k \in \mathbb{Z}$.

$x = 81k + 4615$; ...

$= 81k + 7$...

$8(\cancel{81}k) = \cancel{81}(y - 455)$.

$y = 8k + 455$; $k \in \mathbb{Z}$.

Donc Si (x, y) est solution de (E), Alors

$x = 81k + 4615$; $k \in \mathbb{Z}$.

$y = 8k + 455$; " "

Réciproquement : $8(81k + 4615) - 81(8k + 455)$

$= 36920 - 36855$

$= 65$.

$S_{\mathbb{Z}^2} = \{(81k + 4615, 8k + 455), k \in \mathbb{Z}\}$

2/ $\begin{cases} n \equiv 5 \pmod 8 \\ n \equiv 70 \pmod{81} \end{cases}$

$\begin{cases} n \equiv 5 - 16 \pmod 8 \\ n \equiv 70 - 81 \pmod{81} \end{cases}$

$\begin{cases} n \equiv -11 \pmod 8 \\ n \equiv -11 \pmod{81} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n + 11 \equiv 0 \pmod 8 \\ n + 11 \equiv 0 \pmod{81} \end{cases}$

avec $81 \wedge 8 = 1$.

Donc $n + 11 \equiv 0 \pmod{648}$.

$n \equiv -11 \pmod{648}$.

$n = -11 + 648k$; $k \in \mathbb{Z}$.

$n \geq 0$ donc $-11 + 648k \geq 0$

$k \geq \frac{11}{648}$; $k \in \mathbb{Z}$.

Le plus petit $k = 1$.

Donc $n = -11 + 648$

$n = 637$.

3/ $\begin{cases} a \vee b = 5543 \\ 8a - 81b = 65 \end{cases}$; $a, b \in \mathbb{N}$.

* a et b sont premiers entre eux

$a \wedge b = 1$.

$\Rightarrow a \times b = a \vee b = 5543$.

* a et b sont solutions de (E).

Donc $a = 81k + 4615$; $k \in \mathbb{Z}$.

$b = 8k + 455$

$ab = (81k + 4615)(8k + 455) = 55$...

...$k^2 + 73775k + 20999$...

... $+ 73775k + 20942$...

Ex 3

1/a/ On a $6^2 \equiv 3 \pmod{11}$

$6^3 \equiv 7 \pmod{11}$.

$\Rightarrow 6^5 \equiv 21 \pmod{11}$

$6^5 \equiv -1 \pmod{11}$.

$(6^5)^8 \equiv (-1)^8 \pmod{11}$

$6^{40} \equiv 1 \pmod{11}$.

et On a: $6 \equiv 1 \pmod 5$

$6^{40} \equiv 1 \pmod 5$.

b/ On a
$$\left.\begin{array}{l} 6^{40} - 1 \equiv 0 \pmod 5 \\ 6^{40} - 1 \equiv 0 \pmod{11}. \\ 5 \wedge 11 = 1 \end{array}\right\}$$

$\Rightarrow 6^{40} - 1 \equiv 0 \pmod{55}$.

$6^{40} \equiv 1 \pmod{55}$; $760 = 19 \times 40$

$6^{760} \equiv (1)^{19} \pmod{55}$.

$6^{762} \equiv 1 \times 6^2 \pmod{55}$

$\equiv 36 \pmod{55}$.

2/ $\begin{cases} a^{17} \equiv b \pmod{55}. \ ; a, b \in \mathbb{N} \\ a^{40} \equiv 1 \pmod{55} \end{cases}$

On a $a^{17} \equiv b \pmod{55}$

donc $a^{461} \equiv b^{33} \pmod{55}$.

$b^{33} \equiv a^{461} \pmod{55}$.

$\equiv a \pmod{55}$.

$b^{2640} \equiv (b^{33})^{80} \pmod{55}$

$\equiv (a^{40})^2 \pmod{55}$

$\equiv 1 \pmod{55}$.

3/a/ $(E): 17x - 40y = 1$.

(x, y) solution de (E)

ssi $17x = 1 + 40y$

$17x \equiv 1 \pmod{...}$

$17x - 1 \equiv 0 \ (...$

$$\left.\begin{array}{l} 17(x - 33) \equiv 0 \pmod{40} \\ \text{or } 40 \wedge 17 = 1 \end{array}\right\} \text{alors } x - 33 \equiv 0 (...$$

Ex 4

1) a/

	3	3^2	
Reste mod 8 de 3^n	3	1	

Pour $n \equiv 0 \pmod 2$, $3^n \equiv 1 \pmod 8$.
" $n \equiv 1 \pmod 2$, $3^n \equiv 3 \pmod 8$.

b/ On a $2n \equiv 0 \pmod 2$.
d'où $3^{2n} \equiv 1 \pmod 8$.
d'où $3^{2n}-1 \equiv 0 \pmod 8$.
" A_n est divisible par 8.

c/ On a $2011 \equiv 3 \pmod 8$.
$2011^{2010} \equiv 3^{2010} \pmod 8$; $2010 \equiv 0 \pmod 2$
$\equiv 1 \pmod 8$.

or $2013 \equiv 5 \pmod 8$
$\equiv -3 \pmod 8$.
$2013^{2011} \equiv (-3)^{2011} \pmod 8$
$\equiv -3^{2011} \pmod 8$; $2011 \equiv 1 \pmod 2$
$\equiv -3 \pmod 8$.

D'où $\underbrace{2011^{2010}+2013^{2011}}_{B} \equiv 1-3 \pmod 8$
$\equiv 6 \pmod 8$.

Le reste modulo 8 de B est 6.

2/ (E): $A_3 . x + A_2 y = 24$

Pour $x=3$ et $y=-27$, On a :
$(3^6-1).3+(3^4-1).(-27) =$
$3^7-3-3^7+27=24$.
Donc $(3,-27)$ solution particulière de (E).
Soit (x,y) solution de (E).

~~$(3^6-1)x+(3^4-1)y=(3^6-1)3+(3^4-1)(-27)$~~

~~$(3^6-1)(x-3)=(3^4-1)(-27-y)$.~~

~~On a $(3^6-1)(3^4-1)(-27-y)$~~

~~$(3^4-1)(3^6-1)(x-3)$.~~

(E): $728x + 80y = 24$.

(E) équivaut à $91x+10y=3$.

$91x+10y = 91(3)+10(-27)$

$91(x-3) = 10(-27-y)$.

$10 \mid (-27-y)10$ donc $10 \mid 91(x-3)$.

or $10 \wedge 91 = 1$ donc $10 \mid (x-3)$.

d'où $x-3 = 10K$, $K \in \mathbb{Z}$.

$x = 3+10K$, $K \in \mathbb{Z}$.

$91(x-3) = 10(-27-y)$

$91(10K) = 10(-27-y)$

$y=-91K-27$, $K \in \mathbb{Z}$.

Réciproquement ; $91(3+10K)+10(-91K-27$
$= 273+910K-910K-270$
$=3$.

$S_{\mathbb{Z}^2} = \{(3+10K, -91K-27), K \in \mathbb{Z}\}$.

b/ $x \wedge y = d$ alors $d \mid x$ et $d \mid y$.
alors $d \mid 9x+y$
sig $d \mid 90K+27-91K-27$
" $\boxed{d \mid -K.}$
~~[illegible]~~
Si $d=3$ alors $K \equiv 0 \pmod 3$.
et si $K \equiv 0 \pmod 3$ alors il existe p / $K=3$
$\in \mathbb{Z}$.

~~$d \mid -3p$. donc $d \mid 3$.~~ $3 \mid x$, $3 \mid y$ } $3 \mid$
~~" $d=3$.~~

et $d \mid 91x+10y \Rightarrow d \mid 3 \Rightarrow d=3$.

c/ $x \wedge y = 3$ ssi $K \equiv 0 \pmod 3$.
$x = 30p+3$, $y=-273p-27$, p

$-510 \leq x+y \leq 867$
ssi $-510 \leq 30p+3-273p-27 \leq 867$
" $-486 \leq -243p \leq 891$
$-3{,}6 \simeq -\frac{11}{3} \leq p \leq 2$.
" $p \in \{-3,-2,-1,0,1,2\}$
$+3, -273p-27)$, $p \in$