Lycée pilote de Bizerte	Serie d'exercices n°49 4éme Math	Prof:M.Benali

Exercice 1:

▶ 1. On dispose d'une urne U_1 contenant trois boules rouges et sept boules noires.
On extrait simultanément deux boules de cette urne ; on considère que tous les tirages sont équiprobables.

a) Quelle est la probabilité p_1 que les deux boules tirées soient rouges ?

b) Quelle est la probabilité p_2 que les deux boules tirées soient noires ?

c) Quelle est la probabilité p_3 que les deux boules tirées soient de même couleur ?

d) Quelle est la probabilité p_4 que les deux boules tirées soient de couleurs différentes ?

▶ 2. On dispose aussi d'une deuxième urne U_2 contenant quatre boules rouges et six boules noires.
On tire maintenant deux boules de l'urne U_1 et une boule de l'urne U_2 ; on suppose que tous les tirages sont équiprobables.
On considère les événements suivants :
R : « Les trois boules tirées sont rouges » ;
D : « Les trois boules tirées ne sont pas toutes de la même couleur » ;
B : « La boule tirée dans l'urne U_2 est rouge ».

a) Calculer la probabilité de l'événement R.

b) Quelle est la probabilité de tirer trois boules de même couleur ?

c) Calculer la probabilité conditionnelle $p_D(B)$ de l'événement B sachant que l'événement D est réalisé.

Exercice 2:

Une urne A contient 2 boules rouges et 3 boules noires ; une urne B contient 3 boules rouges et 2 boules noires.
On tire au hasard une boule de l'urne A :
• si elle est noire, on la place dans l'urne B.
• sinon, on l'écarte du jeu.
On tire au hasard ensuite une boule de l'urne B.
On considère les événements suivants :
R_1 : « La boule tirée de A est rouge » ; N_1 : « La boule tirée de A est noire » ;
R_2 : « La boule tirée de B est rouge » ; N_2 : « La boule tirée de B est noire ».

▶ 1. *a*) Calculer les probabilités des événements R_1 et N_1.

b) Calculer les probabilités des événements « R_2 sachant R_1 » et « R_2 sachant N_1 ».

En déduire que la probabilité de R_2 est de $\frac{27}{50}$.

c) Calculer la probabilité de N_2.

▶ 2. On répète n fois l'épreuve précédente (tirage d'une boule de A, suivi du tirage d'une boule de B dans les mêmes conditions initiales indiquées ci-dessus), en supposant les différentes épreuves indépendantes.
Quel nombre minimum d'essais doit-on effectuer pour que la probabilité d'obtenir au moins une fois une boule rouge de l'urne B soit supérieure à 0,99 ?

Exercice 3:

Trois machines fabriquent des ampoules halogènes dans les proportions suivantes : 50 % pour la machine A, 30 % pour la machine B, 20 % pour la machine C.
L'usine procède à des tests pour déterminer la fiabilité des différentes machines. Les résultats montrent que la fiabilité des machines A, B et C est respectivement : 0,95 ; 0,90 ; 0,85.
Dire que la fiabilité de A est de 0,95 signifie que la probabilité qu'une ampoule fabriquée par A soit bonne est de 0,95.
On choisit une ampoule au hasard dans un lot fabriqué par l'usine.

▶ 1. Représenter la situation proposée à l'aide d'un arbre pondéré.

▶ 2. *a*) Déterminer la probabilité de [illegible] bonne et fabriquée par A ».

b) Déterminer la probabilité de l'événement : « L'ampoule est bon[ne et] fabriquée par B ».

c) Déterminer la probabilité de l'événement : « L'ampoule est bon[ne et] fabriquée par C ».

d) Déterminer la probabilité de l'événement : « L'ampoule est bon[ne] »

▶ 3. On achète une ampoule, elle est bonne. Déterminer la proba[bilité] qu'elle ait été fabriquée par A.
Les résultats seront donnés à 10^{-3} près.

▶ 4. On achète 5 ampoules, elles sont bonnes. Quelle est la proba[bilité] pour qu'au moins une ait été fabriquée par A ?

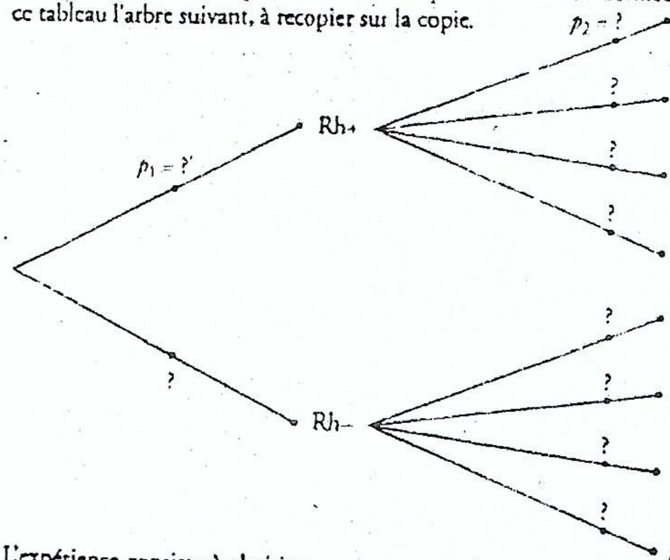
Exercice 4 :

Voici le tableau de répartition des principaux groupes sanguins des h[abi]tants

	O	A	B	AB
Rhésus +	35,0 %	38,1 %	6,2 %	2,8 %
Rhésus −	9,0 %	7,2 %	1,2 %	0,5 %

Dans cet exercice, les résultats numériques demandés seront, s'il y a [lieu,] arrondis à 3 décimales.

▶ 1. L'objectif de cette question est de compléter à l'aide de donnée[s de] ce tableau l'arbre suivant, à recopier sur la copie.



L'expérience consiste à choisir une personne au hasard dans la popu[la]tion donnée.
On note Rh+ l'événement « La personne a le facteur Rh+ ».
On note O l'événement « La personne appartient au groupe O ».

a) Déterminer la probabilité p_1, c'est-à-dire $p(\text{Rh}+)$.
On détaillera le calcul effectué puis on reportera ce résultat dans l'arbr[e.]
Déterminer de même la probabilité p_2 (en détaillant les calcul[s).]

b) Compléter le reste de l'arbre, en remplaçant chaque point d'interr[o]gation par la probabilité correspondante (il est inutile de détailler [les] nouveaux calculs).

▶ 2. *a*) Comment peut-on, à partir de l'arbre complété, déterminer [la] probabilité de O ?
Vérifier ce résultat à partir du tableau.

b) Quelle est la probabilité pour qu'une personne appartenant au gro[upe] O ait le facteur Rh+ ?

▶ 3. *a*) On considère n personnes choisies au hasard dans la populatio[n] donnée.
Calculer, en fonction de n, la probabilité p pour qu'il y [illegible] elle au moins une personne du groupe O.
[illegible] la plus petite valeur de n pour laque[lle]

Série 49

Ex 1)

$U_1 \begin{cases} RRR & (3) \\ NNNNNNN. & (7) \end{cases}$

1) a/ $P_1 = \frac{3}{10} \times \frac{2}{9}$

$= \frac{2}{30} = \frac{1}{15}.$

b/ $P_2 = \frac{7}{10} \times \frac{6}{9}$

$= \frac{7}{15}.$

c/ $P_3 = P_1 + P_2$

$= \frac{8}{15}.$

d/ $P_4 = 1 - P_3$

$= \frac{7}{15}.$

(Write down les événements).

2) $U_2 \begin{cases} RRRR & (4) \\ NNNNNN & (6). \end{cases}$

R: "Les trois boules tirées sont rouges".

D: " " " " ne sont pas toutes de la même couleur."

B: "La boule tirée dans l'urne U_2 est rouge".

a/ $p(R) = P_1 \times p(B)$

$= \frac{1}{15} \times \frac{4}{10}.$

$= \frac{4}{150} = \frac{2}{75}.$

b/ Les trois boules peuvent être soit toutes noires, soit toutes rouges.

On pose N: "les trois boules tirées sont noires".

$p(N \cup R)$

$= p(N) + p(R)$ (Car $N \cap R = \emptyset$).

$= \frac{2}{75} + P_2 \times \frac{6}{10}$

$= \frac{2}{75} + \frac{7}{15} \cdot \frac{6}{10}$

$= \frac{23}{\ldots}$

$P_D(B) = \frac{p(D \cap B)}{p(D)}$

$= \frac{P(B) \times (P_2 + P_4)}{1 - p(N \cup R)}$

$= \frac{\frac{4}{10} \times \left(\frac{7}{15} + \frac{7}{15}\right)}{1 - \frac{23}{75}}$

$= \frac{7}{13}.$

Ex 2)

$A: \begin{cases} RR \\ NNN \end{cases}$

$B: \begin{cases} RRR \\ NN \end{cases}$

Soit les événements:

R_1: "La boule tirée de A est rouge"

R_2: " " " " B " ".

N_1: " " " " A " noire".

N_2: " " " " B " ".

1) a) $p(R_1) = \frac{2}{5}.$

$p(N_1) = \frac{3}{5}$

b) $p(R_2 / R_1) = \frac{p(R_2 \cap R_1)}{p(R_1)}$

$= \frac{\frac{2}{5} \times \frac{3}{5}}{\frac{2}{5}}$

$= \frac{3}{5}.$

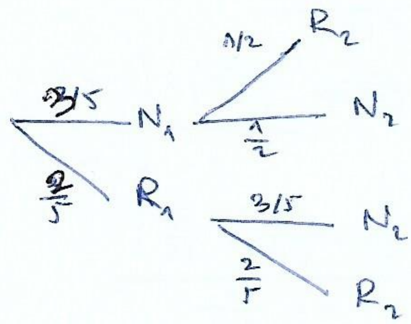
$p(R_2 / N_1) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$

$p(R_2) = p(R_2 \cap N_1) + p(R_2 \cap R_1)$

$= p(R_2 | N_1) \cdot p(N_1) + p(R_2 | R_1) \cdot p(R_1)$

$= \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5} + \frac{3}{5} \times \frac{2}{5}.$

$= \frac{27}{50}.$



d/ $p(N_2) = \cancel{p(N_2)}\ 1 - p(R_2)$

$= \frac{23}{50}$.

2) Soit X la variable aléatoire qui prend pour valeur le nombres de ~~personnes~~ fois On a obtenu une boule Rouge de B.

= l'évènement R_2 est realisé.

$X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3, \ldots, n\}$.

$X \sim \mathcal{B}\left(n,\ p = p(R_2) = \frac{27}{50}\right)$.

La loi de propabilité de X est donnée par :

$\forall k \in X(\Omega)$;

$$p(X=k) = C_n^k \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}.$$

Soit P_n la probabilité cherchée pour que au moins ~~une~~ ~~personne~~ boule tirée de B soit rouge.

$P_n = 1 - p(X=0)$

$= 1 - \left(\frac{23}{50}\right)^n$

On a $\quad 1 - \left(\frac{23}{50}\right)^n \geq 0{,}99$.

ssi $\quad \left(\frac{23}{50}\right)^n \leq 0{,}01$.

ssi $\quad n \cdot \ln\left(\frac{23}{50}\right) \leq \ln(0{,}01)$

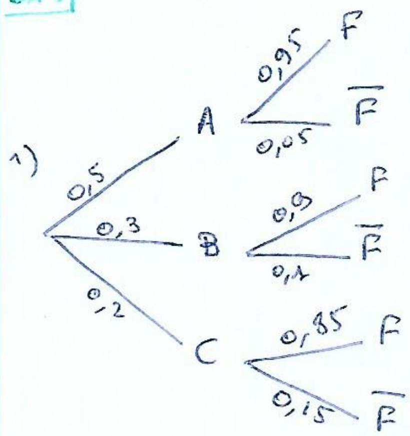
$n \geq \frac{\ln(0{,}01)}{\ln\left(\frac{23}{50}\right)}$

$n \geq 5{,}93$. à 10^{-3} près.

Donc $n = 6$ est le nombre minimum de répétions pour avoir une propabilité

Ex 3

1)



2) a/ $p(F \cap A) = p(F/A) \cdot p(A)$

Il s'agit de calculer

$= 0{,}95 \cdot 0{,}5$

$= 0{,}475$.

b/ $p(F \cap B) = p(F/B) \cdot p(B)$

Il s'agit de calculer

$= 0{,}9 \times 0{,}3$

$= 0{,}27$.

c/ $p(F \cap C) = p(F/C) \times p(C)$

Il s'agit de calculer

$= 0{,}85 \times 0{,}2$

$= 0{,}17$.

d/ $p(F) = p(F \cap A) + p(F \cap B) + p(F$

Il s'agit de calculer

$= 0{,}475 + 0{,}27 + 0{,}17$

$= 0{,}915$.

3) $p(A/F) = \frac{p(A \cap F)}{p(F)}$

Il s'agit de calculer

$= \frac{0{,}475}{0{,}915}$

$= 0{,}519$ à 10^{-3} près

4) On pose l'évènement :

A : " ~~[illegible]~~ Au moins l'une des 5 ampoules bonnes est fabri par A "

$p(A) = 1 - p(\overline{A})$

$= \cancel{1} - \left(\cancel{1} - p(A/F)\right)^5$

$= \cancel{1} - (0{,}481)^5$

$= 0{,}974$ à 10^{-3} près.

Série 49

Ex 4)

1) a/ $P_1 = p(Rh^+)$

$= p(Rh^+ \cap O) + p(Rh+ \cap A) + p(Rh+ \cap B) + p(Rh+ \cap AB)$

~~$= p(Rh^+/O).p(O) + p(Rh+/A).p(A) + p(Rh+/B).p(B) + p(Rh+/AB).p(AB)$~~

$= 0,35 + 0,381 + 0,062 + 0,028$

$= 0,821.$

$P_2 = p(Rh-)$

$= \frac{9 + 7,2 + 1,2 + 0,5}{100}$

$= 0,179.$

b/ $p(O/Rh+) = \frac{p(O \cap Rh^+)}{p(Rh+)}$

$= \frac{0,35}{0,821}$

$= 0,426.$

$p(A/Rh+) = \frac{p(A \cap Rh+)}{p(Rh+)}$

$= 0,464.$

$p(B/Rh+) = \frac{p(B \cap Rh+)}{p(Rh+)}$

$= 0,076.$

$p(AB/Rh+) = \frac{p(AB \cap Rh+)}{p(Rh+)}$

$= 0,034.$

$p(O/Rh-) = \frac{p(O \cap Rh-)}{P_2}$

$= 0,503$

$p(A/Rh-) = \frac{p(A \cap Rh-)}{...}$

$p(B/Rh-) = \frac{p(B \cap Rh-)}{p(Rh-)}$

$= 0,067.$

$p(AB/Rh-) = \frac{p(AB \cap Rh-)}{P_2}$

$= 0,028.$

2) a/ $p(O) = p(O \cap Rh+) + p(O \cap Rh-)$

ssi $p(O) =$ ~~$p(O/Rh+).p(Rh+)$~~

$= 0,35 + 0,09$

$= 0,44.$

b/ $p(Rh+/O) = \frac{p(Rh+ \cap O)}{p(O)}$

$= \frac{0,35}{0,44}$

$= 0,795.$

3) a/ On pose l'évènement E :

"Au moins une personne du groupe O".

On a $\bar{E}$: "Aucune personne " " O".

$p(E) = 1 - p(\bar{E})$

$= 1 - (1 - p(O))^n$

$p \geq 0,9999$ ssi

$1 - 0,56^n \geq 0,9999$

$0,56^n \leq 0,0001$

$n . \ln(0,56) \leq \ln(0,0001)$

$n \geq \frac{\ln(0,0001)}{\ln(0,56)}$

$n \geq 15,88$; $n \in \mathbb{N}$.

La plus petite valeur de n cherchée est $16 = n$.

Correction : Soit X la variable aléatoire qui prend pour valeur le nombre de personnes du groupe O.

$X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.

$\mathcal{B}(n, p = p(O) = 0,44)$

$\forall k \in X(\Omega)$

$$p(X=k) = C_n^k \cdot (0,44)^k (0,56)^{n-k}$$

Soit p_n la probabilité pour que au moins une personne soit du groupe O

est $p_n = 1 - p(X=0)$

$= 1 - (0,56)^n$