Lycée pilote de Bizerte	Serie d'exercices n°51 4éme Math	Prof:M.Benali

Exercice 1:

▶ 1. Le nombre de clients se présentant en cinq minutes dans une station-service est une variable aléatoire X dont on donne la loi de probabilité :

$$p_i = p(X = i)$$

i	0	1	2
p_i	0,1	0,5	0,4

a) Définir et représenter graphiquement la fonction de répartition de X.

b) Calculer l'espérance mathématique de X.

▶ 2. Dans cette station service, la probabilité qu'un client achète de l'essence est 0,7 ; celle qu'il achète du gazole est 0,3. Son choix est indépendant de celui des autres clients. On considère les événements suivants :

C_1 : « En cinq minutes, un seul client se présente » ;

C_2 : « En cinq minutes, deux clients se présentent » ;

E : « En cinq minutes, un seul client achète de l'essence ».

a) Calculer $p(C_1 \cap E)$.

b) Montrer que $p(E/C_2) = 0{,}42$ et calculer $p(C_2 \cap E)$.

c) En déduire la probabilité qu'en cinq minutes un seul client achète de l'essence.

▶ 3. Soit Y la variable aléatoire égale au nombre de clients achetant de l'essence en cinq minutes ; déterminer la loi de probabilité de Y.

Exercice 2:

Une entreprise fabrique des moteurs électriques. Afin de vérifier la conformité des moteurs, on procède à deux tests : l'un de type mécanique, l'autre de type électrique.

Un moteur est rejeté s'il présente au moins l'un des deux types de défaut.

Un moteur est déclaré en parfait état de marche s'il ne présente aucun des deux types de défaut.

Une étude statistique de la production conduit à dégager les résultats suivants :

- la probabilité qu'un moteur soit défectueux pour le test mécanique est 0,08 ;
- la probabilité qu'un moteur soit défectueux pour le test électrique est 0,05 ;
- la probabilité qu'un moteur soit défectueux pour les deux tests est 0,02.

On prélève au hasard un moteur dans la production.

On appelle : D_M l'événement « Le moteur prélevé présente un défaut de type mécanique »,

D_E l'événement « Le moteur prélevé présente un défaut de type électrique ».

1. *a)* Les événements D_M et D_E sont-ils indépendants ?

Calculer la probabilité de l'événement D_M sachant que l'événement D_E est réalisé.

2. *a)* Calculer la probabilité de l'événement A : « Le moteur prélevé présente au moins un défaut ».

Démontrer que la probabilité de l'événement B : « Le moteur prélevé est en parfait état de marche » est 0,89.

Déterminer la probabilité de l'événement C : « Le moteur prélevé présente un seul défaut ».

3. Soit X la variable aléatoire désignant le nombre de types de défaut (électrique ou mécanique) présentés par le moteur.

Quelles sont les valeurs prises par X ?

Déterminer la loi de probabilité de X.

Calculer l'espérance mathématique

Calculer la variance V(X) et en d

▶ 4. On prélève 12 moteurs au hasard dans la production (on ass cette épreuve à un tirage de 12 pièces successivement avec remise). Y la variable aléatoire qui, à chaque prélèvement de 12 moteurs, as le nombre de moteurs en parfait état de marche de ce prélèvement.

a) Quelle est la loi de probabilité de la variable aléatoire Y ?

b) Calculer la probabilité de l'événement « Il y a au moins 10 mo en parfait état de marche ».

Exercice 3:

Lors d'un examen, un questionnaire à choix multiple (Q.C.M.) est lisé.

On s'intéresse à cinq questions de ce Q.C.M. supposées indépenda

À chaque question sont associées quatre affirmations, numérotées 3 et 4, dont une seule est exacte.

Un candidat doit répondre à chaque question en donnant seuleme numéro de l'affirmation qu'il juge exacte ; sa réponse est correcte si firmation qu'il a retenue est vraie, sinon sa réponse est incorrecte.

Dans cet exercice, les probabilités demandées seront données sous fo fractionnaire.

▶ 1. Un candidat répond à chaque question au hasard, c'est-à-dire considère que les quatre affirmations correspondantes sont équi bables.

a) Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :

A : « Le candidat répond correctement à la première des cinq qu tions » ;

B : « Le candidat répond correctement à deux questions au moins les cinq ».

b) On attribue la note 4 à toute réponse correcte et la note − 1 à to réponse incorrecte.

Calculer la probabilité de l'événement C : « Le candidat obtient u note au moins égale à 10 pour l'ensemble des cinq questions

▶ 2. On suppose maintenant qu'un candidat connaît la réponse corr te à deux questions et qu'il répond au hasard aux trois autres question Quelle est alors la probabilité de l'événement C décrit au 1.

**prof : M.Ben Ali **

Série 5

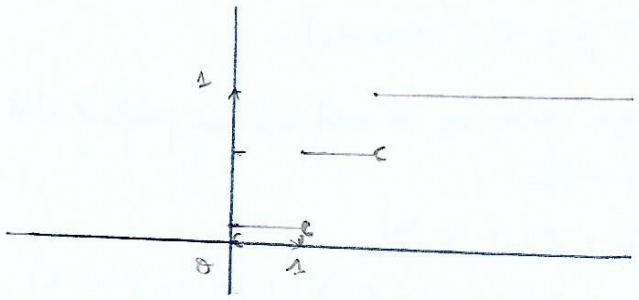
Ex 1

1) a/ Soit F la fonction de répartition de X.

$F : \mathbb{R} \longrightarrow [0,1]$

$x \longmapsto F(x)$ /

$$\begin{cases} F(x) = 0 & \text{si } x < 0. \\ F(x) = 0,1 & \text{si } x \in [0,1[\\ F(x) = 0,6 & \text{si } x \in [1,2[\\ F(x) = 1 & \text{si } x \in [2,+\infty[\end{cases}$$



b/ $E(X) = \sum_{i=0}^{2} x_i \times p_i$

$= 0 \times 0,1 + 1 \times 0,5 + 2 \times 0,4$

$= 1,3.$

2) Soit les évènements suivants:

C_1 : "En 5 min, Un seul client se présente".

C_2 : " " , 2 " clients " ".

E : " " , Un seul client achète l'essence".

a/ $p(C_1 \cap E) = p(C_1) \times p(E/C_1)$

$= 0,5 \times 0,7$

$= 0,35.$

b/ $p(E/C_2) = \frac{2!}{1! \times 1!} \times 0,3 \times 0,7$

$= 0,42.$

$p(C_2 \cap E) = p(E/C_2) \times p(C_2)$

$= 0,42 \times 0,4$

$= 0,168.$

c/ Il s'agit de calcul

3) Soit Y la variable aléatoire égale nombre de clients achetant l'essence 5 minutes.

On a $Y(\Omega) = \{0,1,2\}$.

$p(Y=0) = p(X=0) + p(X=1) \times 0,3$
$+ p(X=2) \times (0,3)^2$

$= 0,1 + 0,5 \times 0,3 + 0,4 \times$

$= 0,286.$

$p(Y=1) = p(E)$

$= 0,518.$

$p(Y=2) = p(X=2) \times 0,7^2$

$= 0,4 \times 0,7^2$

$= 0,196$

La loi de probabilité de Y est donnée le tableau suivant:

k	0	1	2
$p(Y=k)$	0,286	0,518	0,196

Ex 2

On pose les évènements

D_M : "Le moteur prélevé présente un défaut mé

D_E : " " " " " " élec

On a $p(D_M) = 0,08$

$p(D_E) = 0,05$

$p(D_M \cap D_E) = 0,02.$

1) a/ $p(D_E) \times p(D_M) = 0,08 \times 0,05$

$= 0,004.$

$\neq p(D_M \cap D_E).$

Donc D_E et D_M ne sont pas indépend

2) a/ Soit les évènents:

$A = D_E \cup D_M$

$B = \overline{D_E} \cap \overline{D_M}$

$(D_E \cap \overline{D_M}) \cup (D_M$

$p(A) = p(D_E \cup D_M)$

$= p(D_E) + p(D_M) - p(D_E \cap D_M)$

$= 0{,}08 + 0{,}05 - 0{,}02$

$= 0{,}11.$

$p(B) = p(\overline{D_E} \cap \overline{D_M})$

$= p(\overline{D_E \cup D_M})$

$= p(\overline{A})$

$= 1 - p(A)$

$= 0{,}89.$

$p(C) = p(A) - p(D_E \cap D_M)$

$= 0{,}11 - 0{,}02$

$= 0{,}09.$

3) Soit X la variable aléatoire qui prend pour valeurs le nombre de défauts présentés par le moteur.

a/ $X(\Omega) = \{0, 1, 2\}.$

b/ $p(X=0) = p(B)$

$= 0{,}89.$

$p(X=1) = p(C)$

$= 0{,}09.$

$p(X=2) = p(D_E \cap D_M)$

$= 0{,}02.$

La loi de probabilité de X est donnée par le tableau suivant

x_i	0	1	2
$p(X=x_i)$	0,89	0,09	0,02

c/ $E(X) = \sum_{i=0}^{2} x_i \cdot p(X=x_i)$

$= 0 \times 0{,}89 + 1 \times 0{,}09 + 2 \times 0{,}02$

$= 0{,}13.$

d/ $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$

$= \sum_{i=0}^{2} x_i^2 \cdot$

$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

$= 0{,}39128$ à 10^{-5} près.

4) Soit Y la variable aléatoire qui à chaque prélèvement de 12 moteurs, associe le nombre de moteurs en parfait état de marche.

a/ Y suit la loi binomiale de paramètres $(12,\ p(B) = 0{,}89)$.

pour $k \in Y(\Omega) = \{0, 1, 2, \dots, 11, 12\}$

$p(Y=k) = C_n^k \cdot 0{,}89^k \cdot 0{,}11^{n-k}$

b/ On pose M l'évènement :

"Il y a au moins 10 moteurs en parfait état de marche".

$p(M) = p(Y \geq 10)$

$= p(Y=10) + p(Y=11) + p(Y=12)$

$= C_{12}^{10} \cdot 0{,}89^{10} \cdot 0{,}11^2$

$+ C_{12}^{11} \cdot 0{,}89^{11} \cdot 0{,}11$

$+ C_{12}^{12} \cdot 0{,}89^{12}$

$= 0{,}86233$ à 10^{-5} près.

Ex 3

1) Soit les ~~evenements~~ évènements suivants :

A : "Le candidat répond correctement à la première des 5 questions".

B : "Le candidat répond correctement à au moins 2 questions sur 5".

$p(A) = \frac{1}{4}$. (Car les 4 réponses sont équiprobables).

$p(B) = 1 - \left(5 \times \frac{1}{4} \times \left(\frac{3}{4}\right)^4 + \left(\frac{3}{4}\right)^5\right)$

$= \frac{47}{128}$

b/ On pose l'évènement C :

"Le candidat obtient une note ... é... l'ensemble des 5 ... suffit d'avoir 3 répo...

$$p(C) = C_5^3 \times \left(\frac{1}{4}\right)^3 \times \left(\frac{3}{4}\right)^2 + C_5^4 \left(\frac{1}{4}\right)^4 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)$$
$$+ C_5^5 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^5$$
$$= \frac{53}{512}.$$

2) On suppose que le candidat connaît la réponse exacte à 2 questions.

Pour réaliser l'évènement C, il suffit qu'il réponde à une seule autre question parmi les 3 restantes.

$$p(C) = 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^3$$
$$= \frac{37}{64}.$$