

Exercice 1:

1. Montrer que $19^5 \equiv 15[26]$
2. Soit a un entier relatif. Montrer que $a^{13} \equiv a[26]$
3. Soit a et b deux entiers relatifs. Montrer que si $a^5 \equiv b[26]$ alors $b^5 \equiv a[26]$
4. Résoudre dans \mathbb{Z} l'équation $x^5 - 26y = 19$

Exercice 2:

Les suites d'entiers naturels (x_n) et (y_n) sont définies sur \mathbb{N} par :

$$x_0 = 3 \text{ et } x_{n+1} = 2x_n - 1$$

$$y_0 = 1 \text{ et } y_{n+1} = 2y_n + 3.$$

1. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n , $x_n = 2^{n+1} + 1$.
2. Montrer que x_n et x_{n+1} sont premiers entre eux pour tout entier naturel n
3. a. Démontrer que pour tout entier naturel n , $2x_n - y_n = 5$.
b. Exprimer y_n en fonction de n .
c. En utilisant les congruences modulo 5, étudier suivant les valeurs de l'entier naturel p le reste de la division euclidienne de 2^p par 5.
d. On note d_n le PGCD de x_n et y_n pour tout entier naturel n . Déterminer les valeurs possibles de d_n en déduire l'ensemble des entiers naturels n tels que x_n et y_n soient premiers entre eux.

Exercice 3:**Partie A**

1. Soit x et q deux entiers naturels non nuls tel que q est impair.
Démontrer que $1 + x$ divise $1 + x^q$
2. Soit $a \in \mathbb{N}$, $a \geq 2$ et $n \in \mathbb{N}^*$
On suppose que $1 + a^n$ est un nombre premier.
(a) Démontrer que a est pair.
(b) Démontrer que n est une puissance de 2.
3. Parmi les nombres suivants, préciser ceux qui ne sont pas premiers. Justifier chaque Réponse.
 1317 ; $1 + 1317^{16}$; $1 + 1316^{10}$; $1316^{16} - 1$

Partie B

On définit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de nombres entiers par $U_n = 1 + 6^{2^n}$

1. (a) Donner les écritures décimales de u_k pour $0 \leq k \leq 4$
(b) Quel est le nombre de chiffres de u_8 ?
2. Soit n et k des entiers naturels avec $k \geq 1$.
(a) Vérifier que $u_{n+k} - 1 = (u_n - 1)^{2^k}$
(b) En déduire que $u_{n+k} - 2$ est divisible par u_n .
(c) Prouver que deux termes distincts de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont premiers entre eux.
3. Démontrer que pour tout entier naturel n , l'écriture décimale de u_n se termine par 7.
4. Les entiers un sont-ils tous premiers ?

Exercice 4 :

1. Déterminer les nombres entiers naturels m tels que $m^2 + 1 \equiv 0[5]$

2. Soit p un entier naturel premier tel que $p = 3 + 4k, k \in \mathbb{N}$

Et soit n un entier naturel tel que $n^2 + 1 \equiv 0[P]$

- Vérifier que $(n^2)^{2k+1} \equiv -1[P]$
- Montrer que $n \wedge p = 1$
- En déduire que $(n^2)^{2k+1} \equiv 1[P]$

3. Conclure

Exercice 5 :

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $\mathcal{R} = (O, \vec{u}, \vec{v})$

Soit $r_1 = R_{(0, \frac{\pi}{3})}$ et $r_2 = R_{(0, \frac{6\pi}{5})}$

A/ 1. Résoudre dans \mathbb{Z}^2 l'équation (E): $5x + 3y = 75$

2. Soit I le point d'affixe 1, on considère un point A mobile sur le cercle trigonométrique

Sa position initiale est en I . On appelle d la distance qu'a parcourue le point A après avoir

Subie p rotation r_1 et q rotation r_2 . Déterminer les valeurs possibles de p et q pour lesquelles $d = 5\pi$

B/ Soit $S = S_{d(0, 4, \frac{\pi}{3})}$ et $S' = S_{d(0, 6, \frac{6\pi}{5})}$, m et n deux entiers naturels non nuls

On pose $S_m = \underbrace{S \circ S \circ S \dots \dots \dots \circ S}_{m \text{ fois}}$ et $S'_n = \underbrace{S' \circ S' \circ S' \dots \dots \dots \circ S'}_{n \text{ fois}}$ et $f = S_m \circ S'_n$

- Justifier que f est une similitude directe de centre O , de rapport $2^{2m+n} \times 3^n$ et d'angle $m\frac{\pi}{3} + n\frac{6\pi}{5}$
- f peut-elle être une homothétie de rapport 144 ?
- On appelle M le point d'affixe 6 et M' sont image par f
 - peut-on avoir $OM' = 240$
 - Montrer qu'il existe un couple d'entiers naturels (m, n) tel que $OM' = 576$ Calculer alors la mesure principale de (\vec{u}, \vec{OM}')

Exercice 6:

On considère dans \mathbb{Z}^2 les équations E: $35x - 96y = 1$ et E': $35x - 96y = 5$

- Vérifier que le couple $(11, 4)$ est une solution de E puis résoudre E et E'
- Soit (x, y) une solution de E déterminer l'inverse de x modulo 96 et l'inverse de y modulo 35
- Soit (x, y) une solution de E' et $d = x \wedge y$
 - Déterminer les valeurs possibles de d
 - Déterminer x et y lorsque $d = 5$
- Résoudre dans \mathbb{Z} $\begin{cases} n \equiv 11[96] \\ n \equiv 10[35] \end{cases}$
- On considère dans \mathbb{N} l'équation (F): $t^{35} \equiv 2$
 - Montrer que si t est une solution de (F) alors $t \wedge 97 = 1$ puis déduire que $t^{96} \equiv 1$
 - Montrer que si t est une solution de (F) alors $t \equiv 2^{11}[97]$
 - Montrer que si $t \equiv 2^{11}[97]$ alors t est solution de (F)
 - Résoudre alors (F)



Exercice 7:

1) a) Prouver que 29 est un nombre premier

b) Soit $x \in \mathbb{N}$ et n un entier naturel tel que $n \equiv 1[28]$ montrer que $x^n \equiv x[29]$

2) On considère l'équation (E): $17x - 28y = 1$, $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$

a) Justifier que (E) admet des solutions dans \mathbb{Z}^2

b) Résoudre (E)

3) Soit $A = \{0, 1, \dots, 28\}$ pour tout $x \in A$ on note $f(x)$ le reste de la division euclidienne de x^{17} par 29

Et $g(x)$ le reste de la division euclidienne de x^5 par 29

a) Soit $(x, y) \in A^2$ montrer que si $f(x) = f(y)$ alors $x = y$

b) Montrer que pour tout $x \in A$ on a $g \circ f(x) = x$

4) On attribue à chaque lettre de l'alphabet l'entier donné par le tableau ci-dessous

a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
o	p	q	r	s	t	u	v	w	x	y	z	è	é
15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28

Pour chaque lettre α on détermine l'entier n associé puis on calcule $f(n)$.

La lettre α est alors codé par la lettre associée a $f(n)$

a) Coder le mot gauss

b) Décoder le message <bjajif>

Exercice 8:

1) a. Résoudre dans \mathbb{Z}^2 l'équation $E: 13x - 19y = 11$

b. Résoudre alors dans \mathbb{Z} le système $S: \begin{cases} (n+1)^{13} \equiv -6[13] \\ (n+1)^{19} \equiv 5[19] \end{cases}$

2) a. Montrer que 191 est un nombre premier

b. Soit $E = \{1, 2, \dots, 190\}$

Montrer que pour tout $k \in E$ il existe un unique $u_k \in E$ tel que $ku_k \equiv 1[191]$

c. Montrer que si $k \neq k'$ alors $u_k \neq u_{k'}$

d. En déduire que $\sum_{k=1}^{190} u_k \equiv 0[191]$

3) a. Montrer que pour tout $k \in E$ on a $k^{190} \equiv 1[191]$

d. En déduire que $1 + 2^{189} + 3^{189} + \dots + 190^{189} \equiv 0[191]$

4) on pose $S = 190! \sum_{k=1}^{190} \frac{1}{k}$

a. Montrer que $S \in \mathbb{N}$



b. Montrer que $S \equiv 0[191]$

5) a) Résoudre dans Z l'équation $x^2 \equiv 1[191]$

b) Montrer que $189! \equiv 1[191]$ puis déduire que $190! \equiv -1[191]$

6) Soit P un entier naturel tel que $(p - 1)! \equiv -1[p]$ Montrer que p est premier

Exercice 9:

A) On considère dans Z^2 l'équation $E : 142x - 857y = 3$

1) a. En utilisant l'algorithme d'Euclide montré que 142 et 857 sont premiers entre eux

b. Déterminer un couple d'entier tel que $142u - 857v = 1$

c. En déduire une solution particulière de E et la résoudre

2) Soit n un entier naturel à 6 chiffres tel que lorsque l'on échange les trois premiers chiffres avec les trois derniers, le résultat obtenu est $6n + 21$

On suppose que l'écriture décimale de n est $n = abcdef$ et on pose $A = abc$ et $B = def$

a. Montrer que le couple (B, A) est une solution de E

b. Déterminer alors n

B) Soit a un entier naturel non nul et p un nombre premier supérieur ou égal à 5 tel que

$$a^2 + a + 1 \equiv 0[P]$$

1) a. Montrer que $(a + 1) \wedge p = 1$ et $(a - 1) \wedge P = 1$

b. Montrer que $a^3 \equiv 1[P]$

c. Montrer alors que 3 est le plus entier naturel non nul vérifiant $a^k \equiv 1[P]$

2) a. Montrer que $a^{p-1} \equiv 1[P]$

b. En effectuant la division euclidienne de $(p - 1)$ par 3 montrer que $P \equiv 1[3]$

Exercice 10

Soit (F_n) la suite définie pour tout n de \mathbb{N} par $F_n = 2^{2^n} + 1$

1) Vérifier que pour tout n de \mathbb{N} on a $F_{n+1} - 2 = F_n(F_n - 2)$

2) On considère la suite (u_n) définie sur \mathbb{N}^* par $u_n = F_0 F_1 \dots \dots F_{n-1}$.

a) Montrer par récurrence que pour tout n de \mathbb{N}^* on a $u_n = F_n - 2$

b) En déduire que $F_n \wedge u_n = 1$ et que $F_n \wedge F_m = 1$ pour tout n et m de \mathbb{N}

c) En déduire qu'il existe une infinité des nombre premier

3) Soit $n \geq 2$. Déterminer le chiffre des unités de F_n

