Sujet de revision N°1

EXERCICE N°1

Cocher la réponse exacte

1) Soit z un nombre complexe vérifiant : $|z|+\bar{z}$ =6+2i la forme cartésienne de z est :

☐ $\frac{8}{3}+2i$ ☐ $\frac{8}{3}-2i$ ☐ $-\frac{8}{3}-2i$ ☐ $-\frac{8}{3}+2i$

2) l'ensemble des points M d'affixes z vérifiant : $|z-1|=|z+i|$ est :

☐ y=x-1 ☐ y=-x ☐ y=x+1 ☐ y=-x+1

3) n est un entier ; $(\sqrt{3}+i)^n$ est réel si et seulement si n s'écrit sous la forme :

☐ 3k+1 ☐ 3k+2 ☐ 3k ☐ 6k

4) soit l'équation (E) : $z=\frac{6-z}{3-z}$ une solution de (E)est :

☐ $-2-\sqrt{2}i$ ☐ $2+\sqrt{2}i$ ☐ 1-i ☐ 1-i

5) ABC est un triangle équilatéral direct tel que $z_A=i$ et $z_B=\sqrt{3}$ alors $z_C=$

☐ -i ☐ 2i ☐ $\sqrt{3}+2i$ ☐ $\sqrt{3}+i$

6) l'ensemble des points M(z) vérifiant $\arg\left(\frac{z+2}{z-2i}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$ est inclus dans :

☐ Y=x ☐ le cercle de centre I(1+i) et de rayon $\sqrt{2}$ ☐ le cercle de diamètre $[AB]$ avec $z_A=-2$ et $z_B=2i$

EXERCICE N°2

$(O,\vec{u},\vec{v})$ est un repère orthonormée direct du plan complexe on pose $z_A=-1+i$; $z_B=3+2i$ et $z_C=i\sqrt{2}$ et k : l'application

$M(z)\mapsto M'(z')$ telque $z'=\frac{1+i}{\sqrt{2}}z-1+i(1+\sqrt{2})$ et f= $k\circ S_{(O,\vec{u})}$

1) Calculer les affixes des points A'=f(A) et C'=f(C) et déduire la nature et caractériser f

2) soit g : $M(z)\mapsto M'(z')$ telque $z''=(1+i)\bar{z}-1+3i$ pour écriture complexe

a) soit M_0 le point d'affixe 2-4i ; Déterminer l'affixe de M_0'' =g(M_0) puis vérifier que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AM_0''}$ sont orthogonaux

b) On considère un point M d'affixe z et on suppose que x=réel(z) et y=im(z) sont des entiers Déterminer les points M dont les coordonnés sont des entiers appartenant à $[-6,6]$ tels que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AM''}$ sont orthogonaux (M''=g(M))

EXERCICE N°3

1) on donne dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ l-équation (E) :3x-8y=5

Montrer que les solutions de (E) sont les couples (8k-1,3k-1) avec k $\in\mathbb{Z}$

2)a) Soit n,x et y trois entiers tels que $\begin{cases} n=3x+2 \\ n=8y+7 \end{cases}$ montrer que (x,y) est une solution de (E)

b) on considère le système(S) $\begin{cases} n \equiv 2[3] \\ n \equiv 7[8] \end{cases}$ avec n est un entier

Montrer que n est solution du système (S) si et seulement si $n \equiv 23[24]$

3)a) Soit k un entier naturel

Déterminer le reste de 2^{2k} $\bmod ulo 3$ *et le reste* 7^{2k} $\bmod ulo\ 8$

b) Vérifier que 1991 est une solution de (S) et montrer que $1991^{2008} - 1$ est divisible par 24

EXERCICE N°4

Soit f la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par f(x)=x+ln$\left(1+e^{-2x}\right)$ et soit ζ sa courbe dans $(O,\vec{i},\vec{j})$

A)1)a- Dresser le tableau de variation de f

b-tracer ζ

2)a-Montrer que f est une bijection de $[0,+\infty[$ sur $[\ln 2,+\infty[$

b- Construire la courbe ζ' de la courbe de f^{-1}

3)a) montrer que pour tout t de $[0,+\infty[$ on a : $1-t \leq \dfrac{1}{1+t} \leq 1$

b) En déduire que pour tout x de $[0,+\infty[$ $x-\dfrac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x$

Déduire un encadrement de ln $\left(1+e^{-2t}\right)$ pour tout t de $[0,+\infty[$

4) Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$,on désigne par s_n la mesure de l'aire du domaine limité par ζ ,la droite D :y=x et les droites d'équations x=0 et x=n

a) Montrer que $\dfrac{3}{8}-\dfrac{1}{2}e^{-2n}+\dfrac{1}{8}e^{-4n} \leq s_n \leq \dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}e^{-2n}$

b) Montrer que s_n est convergente vers un réel dont on donnera un encadrement

B) Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = \int_0^{\ln 2} dx$ et pour tout n de $\mathbb{N}^*$ par $u_n = \int_0^{\ln 2} [f'(x)]^n dx$

1)a)calculer u_0 et u_1 b) Montrer que x de $[0,\ln 2]$ *on a*:$0 \leq f'(x) \leq \dfrac{3}{5}$ et déduire que $0 \leq u_n \leq \left(\dfrac{3}{5}\right)^n \ln 2$ *et* calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

2)a) montrer que pour tout x de $[0,+\infty[$ on a : $1-f''(x)=[f'(x)]^2$

b) Montrer que pour tout entier n tel que $n \geq 2$, *on a* $u_n = u_{n-2} - \dfrac{1}{n-1}\left(\dfrac{3}{5}\right)^{n-1}$

c)déduire pour tout n de $\mathbb{N}^*$ on a: $u_{2n} = u_0 - \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{2k-1}\left(\dfrac{3}{5}\right)^{2k-1}$ et $u_{2n+1} = u_1 - \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{2k}\left(\dfrac{3}{5}\right)^{2k}$

4) Pour tout n de $\mathbb{N}^*$ on pose $v_n = \sum\limits_{k=1}^{2n} \dfrac{1}{k}\left(\dfrac{3}{5}\right)^k$ Montrer que (v_n) converge vers un réel que l'on précisera