Lycée Mahmoud Magdich **Série 4M** **Mme Chaabouni**

Exercice N° 1

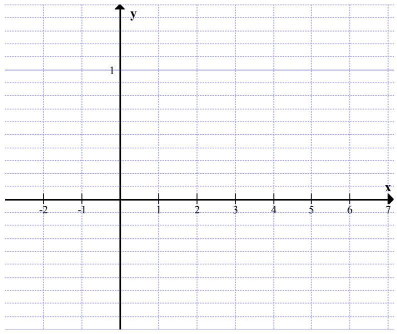
Répondre par Vrai ou Faux en justifiant la réponse

1/ Soit x un entier relatif $\begin{cases} x \equiv 3(\bmod 9) \\ x \equiv 2(\bmod 10) \end{cases}$ si et seulement si $x \equiv 12 \ (\bmod\ 90)$

2/ Si A et B sont deux évènements indépendants alors $p(A \cup B) = p(A/B) + p(B/A)$

3/ Dans le graphique ci-contre on a représenté la fonction de répartition d'une variable aléatoire X

Alors l'espérance de X est $E(X) = 1{,}3$



Exercice N° 2

Pour tout $n \in IN^*$ on pose $U_n = (1006)^n + (1007)^n$

1/a) Soit $n \in IN$ Déterminer suivant n le reste modulo 5 de 2^n

b) Déterminer le reste de la division euclidienne U_{2013} par 5

c) Montrer que pour tout $n \in IN^*$ $U_{2n+1} \equiv 0 \ (\bmod\ 2013)$

2/ a) Montrer que pour tout $n \in IN^*$ $U_n \equiv (1+(-1)^n)(\bmod\ 3)$

b) En déduire que pour tout $n \in IN^*$ $U_{U_n} \equiv 0 (\bmod\ 3)$

Exercice N° 3

Une entreprise A est spécialisée dans la fabrication en série d'un article : un contrôle de qualité a montre que chaque article produit par l'entreprise A pouvait présenter deux types de défaut : un défaut de soudure avec une probabilité égale a 0,03 et un défaut sur un composant électronique avec une probabilité égale a 0,02. Le contrôle a montre aussi que les deux défauts aient indépendants. Un article est dit défectueux s'il présente au moins l'un des deux défauts.

1) Montrer que la probabilité qu'un article fabrique par l'entreprise A soit défectueux est égale a 0,0494.
2) Une grande surface reçoit 800 articles de l'entreprise A. Soit X la variable aléatoire qui, a cet ensemble de 800 articles, associe le nombre d'articles défectueux.
   a) Définir la loi de X.
   b) Calculer l'espérance mathématique de X. Quel est le sens de ce nombre ?
3) a) Un peut commerçant passe une commande de 25 articles à l'entreprise A.
   Calculer, à 10^{-3} près, la probabilité qu'il y ait au plus 2 articles défectueux dans sa commande
   b) Il veut que, sur sa commande, la probabilité d'avoir au moins un article défectueux reste inférieur à 50 %. Déterminer la valeur maximale du nombre K d'articles qu'il peut commander.

Exercice N° 4

Une urne U_1 contient sept boules noires et trois boules vertes.

Une urne U_2 contient deux boules noires et huit boules vertes.

On effectue une suite de tirages en remettant à chaque fois la boule tirée dans l'urne, suivant la règle suivante.

Si au $(n-1)^{\text{ème}}$ tirage , on a obtenu une boule noire alors le $n^{\text{ème}}$ tirage s'effectue dans U_1

Si au $(n-1)^{\text{ème}}$ tirage , on a obtenu une boule verte alors le $n^{\text{ème}}$ tirage s'effectue dans U_2

1) On choisit une urne au hasard et on fait le premier tirage.

Déterminer la probabilité p_1 d'obtenir une boule noire

2) On désigne par p_n la probabilité de tirer une boule noire au $n^{\text{ème}}$ tirage

a) Calculer p_2

b) Montrer que $p_n = = \frac{1}{2}P_{n-1} + \frac{1}{5}$ $n \geq 2$

3) a) Montrer que la suite ( ) $_{n \geq 1}$ définie par $q_n = p_n - \frac{2}{5}$ $n \geq 1$ est une suite géométrique.

4) Déterminer p_n en fonction de n En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} P_n$

Exercice N° 5 :

Des personnes P_1 ,P_2 ,..,P_n ,… se transmettent une information dans cet ordre. Chaque personne transmet l'information de manière fidele avec une probabilité de 0,9 ou la change en son contraire avec une probabilité de 0,1.

On suppose que la première personne possède l'information non déformée.

Pour ≥ 1, A_n est l'événement « la $n^{ème}$ personne possède l'information non déformée » et P_n sa probabilité.

1) Calculer P_1 etP_2

2) Utiliser un arbre pour calculer P_n

3) Montrer que pour tout ≥ 1, $P_{n+1} = 0,8.\ P_n + 0,1$

4) Soit (q_n) la suite définie par $q_n = P_n - 0.5$ $n \geq 1$ Montrer que (q_n) est une suite géométrique. Exprimer P_n alors en fonction de n

5) Quelle est la probabilité que la $20^{ème}$ personne possède l'information non déformée.

Exercice N° 6

Soit $n \in IN^*$ et f_n la fonction définie sur $[\ 1\ ,+\infty\ [$ $f_n(x) = x(\ln x)^n$

1) Montrer que l'équation $f_n(x) = 1$ admet une solution α_n unique dans $]\ 1,+\infty\ [$ et que $1 < \alpha_n < e$

2) a) Montrer que $n \in IN^*$ $f_{n+1}(\alpha_{n+1}) - f_{n+1}(\alpha_n) = 1 - \ln\alpha_n$

b) En déduire la suite (α_n) est croissante sur IN^*

3) a) Pour $n \in IN^*$ on pose $t_n = \sqrt[n]{\alpha_n}$. Montrer que $t_n \ln t_n = \dfrac{1}{n}$

b) Montrer que $t \geq 1$ on a $0 \leq \ln t \leq t - 1$. En déduire pour $x \geq 1$ $(x-1) \leq x\ln x \leq \dfrac{1}{2}(x^2 - 1)$

c) Montrer que $n \geq 1$ $\left(1+\dfrac{2}{n}\right)^{\frac{1}{2}} \leq t_n \leq 1+\dfrac{1}{n}$

d) En déduire $n \geq 1$ $\left(1+\dfrac{2}{n}\right)^{\frac{n}{2}} \leq \alpha_n \leq \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$

e) Montrer $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = 1$ En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n = e$

Exercice n°6

Soit f la fonction définie sur IR par $f(x) = \dfrac{1}{e^x + e^{-x}}$

1) a- Montrer que f est dérivable sur IR et que $f'(x) = \dfrac{1-e^{2x}}{e^x(e^x+e^{-x})^2}$

b- Dresser le tableau de variation de f

c- Tracer la courbe Cf de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

2) a- Pour $n \in IN$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^n f(x)dx$ Montrer que la suite (I_n) est croissante

b- Montrer que pour tout réel x positif on a : $\dfrac{1}{2e^x} \leq f(x) \leq \dfrac{1}{e^x}$

c- En déduire que pour tout entier n, $\dfrac{1-e^{-n}}{2} \leq I_n \leq 1 - e^{-n}$

d- Déduire que la suite (I_n) est convergente et donner un encadrement de sa limite ℓ

3) La fonction $g : x \mapsto \tan(x)$ réalise une bijection de $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ sur $[0,+\infty[$ .On note g^{-1} sa réciproque

a- Montrer que pour tout $x \in [0,+\infty[$, $(g^{-1})'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$

b- Pour $x \in IR$, on pose $h(x) = g^{-1}(e^x)$ .Montrer que $h'(x) = f(x)$

c- Montrer que $I_n = g^{-1}(e^n) - g^{-1}(1)$ …

c)Tracer l’allure de CF On précisera la demi tangente à CF en A (1, F(1))