Lycée Mahmoud Magdich	**série 4M**	**Mme Chaabouni**

<u>Exercice n° 1 : session principale 2013</u>

Répondre par <u>Vrai</u> ou <u>Faux</u> <u>en justifiant la réponse</u>

I/1/soit n un entier si $33n \equiv 0$ (mod 2013) alors $n \equiv 0$ (mod 61)

2/l'équation (E): $33x + 11y = 2013$ admet des solutions dans Z x Z

3/ si $4x \equiv 10y$(mod 5) alors $x \equiv 0$ (mod 5)

III) Résoudre dans Z x Z le système $\begin{cases} 17x \equiv 3 (\text{mod } 5) \\ 5y \equiv 3 (\text{mod } 17) \end{cases}$

<u>Exercice n°2</u>

II) 1/a)Déterminer en fonction de n le reste modulo 7 de 3^n

b) Déterminer l'ensemble des entiers naturels n tel que $10^n - 3^{n+2} \equiv 1$ (mod 7)

2/ Pour tout entier naturel $n \geq 1$ On pose $X_n = a1111 \ldots 1$ ou le chiffre 1 est répète n fois et le chiffre a est non nul

a) Montrer que Pour tout entier naturel $n \geq 1$; $X_n \equiv 1 + 3 + 3^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + 3^{n-1} + a\,3^n$ (mod 7)

b) En déduire que $2X_n \equiv -1 + (2a+1)\,3^n$ (mod 7)

c) Déterminer les valeurs de a pour que X_{19} soit divisible par 7

<u>Exercice n°3</u>

On considère la suite (u_n) d'entiers naturels définie par $u_0 = 14$, $u_{n+1} = 5u_n - 6$ pour tout entier naturel n.

1. Calculer u_1, u_2, u_3 et u_4.

2. Montrer que, pour tout entier naturel n, $u_{n+2} \equiv u_n (\text{modulo } 4)$. En déduire par recccurence que pour tout entier $u_{2k} \equiv 2 (\text{modulo } 4)$ et $u_{2k+1} \equiv 0 (\text{modulo } 4)$.

3. a. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $2u_n = 5^{n+2} + 3$.
b. En déduire que, pour tout entier naturel n, $2u_n \equiv 28 (\text{modulo } 100)$.

4. Déterminer les deux derniers chiffres de l'écriture décimale de u_n suivant les valeurs de n.**<u>Exercice n °2 :</u>**

Le directeur du personnel d'une entreprise constate que, chaque hiver, un nombre important d'employés s'absentent, malades de la grippe. Le médecin de l'entreprise lui assure qu'une personne non vaccinée contre la grippe a 40 % de risques de la contracter, alors qu'une personne vaccinée n'a que 5 % de risques de tomber malade.

Le directeur décide donc de proposer au personnel une vaccination gratuite.

1) On choisit au hasard un employé et on considère les événements suivants :

V : « l'employé s'est fait vacciner »,

G : « l'employé contractera la grippe durant l'hiver ».

1) a) Déterminer les probabilités $p(G/V)$, $p(\overline{G}/V)$, $p(G/\overline{V})$ et $p(\overline{G}/\overline{V})$

b) Montrer que $p(G) = 0{,}4 - 0{,}35\,p(V)$.

2) Déterminer le pourcentage de personnes à vacciner pour que 20 % des employés aient la grippe cet hiver.

3) Dans la suite de l'exercice, on suppose que 80 % du personnel accepte faire la vaccination.

a) Quelle est la probabilité pour qu'un employé, pris au hasard, tombe malade cet hiver ?

b) Un ingénieur dans l'entreprise, tombe malade de la grippe.
Quelle est la probabilité pour qu'il soit vacciné ?

c) Calculer la probabilité qu'un employé, pris au hasard, ne soit pas vacciné et attrape la grippe cet hiver ?

4) On choisit au hasard 10 employés dans l'entreprise. On assimilera ce choix à une succession de 10 épreuves identiques, dont les résultats sont indépendants.

Quelle est la probabilité qu'il y ait exactement trois de ces employés qui ne soient pas vacciné et qui att
grippe cet hiver

Exercice n°4

1) a) On lance un dé truqué dont les faces sont numérotées de 1 à 6. Sachant que la probabilité d'apparition du numéro 6 est $\frac{1}{3}$ et que les autres numéros ont la même probabilité d'apparition

Calculer la probabilité d'apparition pour chacun des numéros de 1 à 5 .

b) On lance aussi une pièce de monnaie truquée. Sachant que la probabilité d'apparition de « pile » est $\frac{2}{5}$

Calculer la probabilité d'apparition de la « face »

2) On lance simultanément le dé et la pièce de monnaie et on désigne par X la variable aléatoire défini par :

- ☐Si la face « pile » apparait en même temps qu'un numéro impair du dé alors $X = 0$
- ☐Si la face « pile » apparait en même temps qu'un numéro pair du dé alors $X = 1$
- ☐Si la face « pile » apparait alors X prend pour valeur le numéro apparu sur le dé

Déterminer la loi de probabilité de X

3) On répète, de manière indépendante, l'épreuve précédente trois fois de suite et on désigne par Y le nombre de fois où l'on obtient $X \geq 5$

a) Calculer $(Y = 2)$ b) Calculer l'espérance mathématique de Y ainsi que sa variance

Exercice n°5

Une fabrique artisanale de jouets en bois vérifie la qualité de sa production avant sa commercialisation. Chaque jouet produit par l'entreprise est mis à deux contrôles : d'une part l'aspect du jouet est examiné afin de vérifier qu'il ne présente pas de défaut de finition, d'autre part sa solidité est testée. Il s'avère, à la suite d'un grand nombre de vérifications, que :

- 92 % des jouets sont sans défaut de finition ;
- parmi les jouets qui sont sans défaut de finition, 95 % réussissent le test
- 2 % des jouets ne satisfont à aucun des deux contrôles. On prend au hasard un jouet parmi les jouets produits. On note
- F l'événement : « Le jouet est sans défaut de finition »
- S l'événement : « Le jouet réussit le test de solidité ».

1/ Construction d'un arbre pondéré associé à cette situation

a)Traduire les données de l'énoncé en utilisant les notations des probabilités. Démontrer que $p_{\overline{F}}(\overline{S}) = \frac{1}{4}$ Construire l'arbre pondéré correspondant à cette situation.

b)Démontrer que p (S) = 0,934.

a) Un jouet a réussi le test de solidité. Calculer la probabilité qu'il soit sans défaut de finition.

2/Les jouets ayant satisfait aux deux contrôles rapportent un bénéfice de 10 €, ceux qui n'ont pas satisfait au test de solidité sont mis au rebut, les autres jouets rapportent un bénéfice de 5 €. On désigne par B la variable aléatoire qui associe à chaque jouet le bénéfice rapporté.

a) Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire B.

b)Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire B

3/ On prélève au hasard dans la production de l'entreprise un lot de 10 jouets. On désigne par X la variable aléatoire égale au nombre de jouets de ce lot subissant avec succès le test de solidité. On suppose que la quantité fabriquée est suffisamment importante pour que la constitution de ce lot puisse être assimilée à un tirage avec remise.

Calculer la probabilité qu'au moins 8 jouets de ce lot subissent avec succès le test de solidité

Exercice n°6

n est un entier naturel non nul.

On considère la fonction a_n définie sur $[0,+\infty[$ par : $a_n(x) = \int_0^x e^{-nt}\,dt$

1/ a) Montrer que pour tout réel $x \geq 0$ $a'_n(x) + n a_n(x) = 1$

b) Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, $\lim\limits_{x \to +\infty} a_n(x) = \frac{1}{n}$

2/ a) Montrer que pour tout réel $u \geq 0$, $1 - u \leq \frac{1}{1\ldots} \leq 1$

b) Déduire que pour tout réel $t \geq 0$, $t - \frac{t^2}{2} \leq \ln(1+t) \leq t$

3/ On considère la fonction F_n définie sur $[0,+\infty[$ par : $F_n(x) = \int_0^x e^{-t}\ln(1+e^{-nt})dt$

a) Montrer que la fonction F_n est croissante sur $[0,+\infty[$.

b) Montrer que pour tout réel $x \geq 0$, $a_{n+1}(x) - \frac{a_{2n+1}(x)}{2} \leq F_n(x) \leq a_{n+1}(x) \leq \frac{1}{n+1}$

c) Montrer que $F_n(x)$ possède une limite finie lorsque x tend vers $+\infty$.

On note par la suite $U_n = \lim\limits_{x \to +\infty} F_n(x)$

d) Montrer que pour tout $n \geq 1$, $\frac{1}{n+1} - \frac{1}{4n+2} \leq U_n \leq \frac{1}{n+1}$ Puis calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$

4/ Pour tout réel $x \geq 0$, on pose $G_n(x) = \int_0^x \frac{e^{-t}}{1+e^{nt}}dt$

a) A l'aide d'une intégration par parties montrer que : $F_n(x) = \ln 2 - e^{-x}\ln(1+e^{-nx}) - nG_n(x)$

b) On pose $\lim\limits_{x \to +\infty} G_n(x) = V_n$,Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} nV_n = \ln 2$