Mr : Chahed **Série de révision analyse 1** **4eme Math**

Exercice 1

Répondre par vrai ou faux en justifiant la réponse :

1° / Les suites suivantes sont convergentes :

a) $U_n = n\sin\left(\frac{1}{n}\right)$; b) $V_n = \frac{(-1)^n n}{n+1}$; c) $W_n = (-1)^n n + \frac{n}{n+1}$; d) $a_n = \frac{2^n}{n}$

i) $f_n = 1 + e^{-1} + e^{-2} + \cdots\cdots\cdots + e^{-n}$.

2) Soient (U_n) et (V_n) les suites définies sur $\mathbb{N}^*$ par $U_n = 1 + \frac{1}{n}$ et $V_n = 1 - \frac{1}{n}$

Les deux suites sont adjacentes

Exercice 2

Partie A

On considère la fonction f définie sur R par $f(x) = \frac{e^{2x}}{e^x+1}$) et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$

1. Étudier les branches infinies de (C)
2. Dresser le tableau de variation de f
3. Tracer (C) et T la tangente a (C) au point abscisse 0

4.a. Montrer que réalise une bijection de R sur un intervalle J que l'on précisera

b. Tracer dans le même repéré la courbe de f^{-1}

c. Expliciter $f^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$

5. Soit $\alpha \in]-\infty, 0[$ et S_α l'aire de la partie du plan limité par (C) Et les droites d'équation respective $x = 0.$, $x = \alpha$ et $y = 0$. Calculer S_α et $\lim\limits_{\alpha \to +\infty} S_\alpha$

Partie B

Soit n un entier naturel non nul

On considère la fonction F_n définie sur $]-\infty, 0]$ par $F_n(x) = \int_x^0 \frac{e^{nx}}{e^x+1}\,\mathrm{dt}$

1.a. Calculer $F_1(x)$ et vérifier que $\lim\limits_{x \to -\infty} F_1(x) = \ln(2)$

b. Déterminer $\lim\limits_{x \to -\infty} F_2(x)$

2. a. Montrer que $\forall n \in \mathrm{N}^*$ on a $F_{n+1}(x) + F_n(x) = \frac{1}{n}(1 - e^{nx})$

b. Montrer par récurrence que F_n admet une limite R_n en $-\infty$

3.a. Montrer que $\forall t \leq 0$ on a $2e^t \leq 1 + e^t \leq 2$

b. Montrer que $\forall n \geq 2$ et $\forall x \in]-x, 0]$ on a $\frac{1}{2n}(1 - e^{nx}) \leq F_n(x) \leq \frac{1}{2(n-1)}(1 - e^{(n-1)x})$

c Déduire un encadrement de R_n

4. On pose $G_n(x) = (-1)^n \int_x^0 e^{nt}\,\mathrm{dt}$ pour tout $x \in]-\infty, 0]$

a. Calculer $G_n(x)$ et montrer que $\lim\limits_{x \to -\infty} G_n(x) = \frac{(-1)^n}{n}$

b. Montrer que $\forall n \geq 2$ on a $\sum_{k=1}^{n} G_k(x) = (-1)^n F_{n+1}(x) - F_1(x)$

5. Soit (u_n) la suite définie sur N^* par : $U_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k}$

a. Montrer que $u_n = \ln(2) + (-1)^{n+1} R_{n+1}$

c. En déduire que (u_n) est convergente et calculer sa limite

Exercice 3

Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{\sqrt{e^{2x}-1}}$

1) a. Montrer que f est une bijection de $]0, +\infty[$ sur $]0, +\infty[$ et expliciter $f^{-1}(x)$

b. Tracer C_f et $C_{f^{-1}}$

2) Soit h la fonction définie sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ par $h(x) = \frac{1}{2}\ln\left(1 + \tan^2(x)\right)$

a. Montrer que h est une bijection de $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ sur $]0, +\infty[$

b. Montrer que h^{-1} est dérivable sur $]0, +\infty[$ et que $(h^{-1})'(x) = f(x)$

c. Soit $a > \ln(\sqrt{2})$ on désigne par A(a) l'aire de la partie limitée par C_f et les droites d'équation respectives $x = \ln(\sqrt{2})$,$x = a$ et $y = 0$ déterminer la limite de A(a) lorsque a tend vers $+\infty$

Exercice 3

Partie A

Soit f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $f(x) = \frac{-\lim(x)}{\sqrt{x}}$ et C sa courbe représentative

1- a) Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. Interpréter le résultat

b) Dresser le TV de f et tracer C

2. Pour tout $n \in \mathrm{IN}^*$ on considere la fonction définie sur $]0,1[$ par $g_n(x) = f(x) - x^n$
   a. Montrer que g_n est strictement décroissante
   b. En déduire que $\forall n \in \mathrm{IN}^*$ il existe un unique réel α_n dans $]0,1[$ tel que $f(\alpha_n) - (\alpha_n)^n$
   c. Montrer que $\forall\ n \in \mathrm{IN}^*$ $g_n(\alpha_{n+1}) < 0$
   d. Montrer que (α_n) est croissante puis convergente
3. Soit $\ell = \lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n$ et h : $x \mapsto -\frac{1}{2} + \frac{Ln(-Ln(x))}{Ln(x)}$
   a. Vérifier que $h(\alpha_n) = \boldsymbol{n}$
   b. Montrer que $\ell = 1$ et lim $(\alpha_n)^n$=0

Partie B

1- Soit F la fonction définie sur $]\mathbf{0},+\infty[$ par $F(x)= \int_x^1 f(x)dx$

a) Etudier le signe de $F(x)$
b) À l'aide d'une intégration par partir montrer que $F(x) = 4 - 4\sqrt{x} + 2\sqrt{x}\,\mathrm{Ln}(x)$
c) En déduire l'air par unité d'air de la partie du plan limite par $\boldsymbol{C}$ est la droite d'équation respective $x = (\boldsymbol{e})^2, x = 1$ et $y = 0$

2-Pourtant $n \in \mathrm{IN}^*$ on pose $u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$

a) Montrer que $\forall\ n \geq 2$ et $1 \leq k \leq n-1$ on a : $\frac{1}{n} f(\frac{k+1}{n}) \leq \int_{\left(\frac{k}{n}\right)}^{\left(\frac{k+1}{n}\right)} f(x)\,dx \leq f\left(\frac{k}{n}\right)$
b) En déduire que: $f(n) + u_n \leq \int_{\frac{1}{n}}^{1} f(n)\,dx \leq u_n$
c) En déduire alors que $\lim\limits_{n} u_n = 4$

Exercice 4

1) Soit g la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $g(x) = x\big(2 - \ln(x)\big) - 2$
   a. Dresser le tableau de variation de g
   b. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet exactement deux solutions 1 et α tel que $4.8 < \alpha < 5$
   c. En déduire le signe de $g(x)$

2) On considère la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par $\begin{cases} f(x) = \frac{(\ln(x))^2}{x-1} & si\ x \neq 1 \\ f(1) = 0 \end{cases}$ et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$
   a. Montrer que f est dérivable en 1 et déterminer $f'(1)$
   b. Montrer que pour tout $x \in]0,+\infty[\setminus\{1\}$ on a $f'(x) = \frac{\ln(x)}{x(x-1)^2} g(x)$
   c. Montrer que $f(\alpha) = 4\frac{\alpha-1}{\alpha^2}$ et donner le tableau de variation de f et tracer (C)

3) On considère les deux fonction F et G définies sur $[1,+\infty[$ par

$$F(x) = \int_1^x \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{dt} \qquad \text{et} \qquad G(x) = \int_1^x \frac{(\ln(t))^2}{t^2}\,\mathrm{dt}$$

Montrer que pour tout $x \in [1,+\infty[$ on a $G(x) = 2 - \frac{1}{x}\left(\left(ln(x)\right)^2 + 2ln(x) + 2\right)$ et calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} G(x)$

Dans la suite on admet $\lim\limits_{x\to+\infty} \boldsymbol{F(x) = l}$ un nombre fini.

4) Pour tout $n \in \mathrm{N}^*$ on considère les fonctions F_n et G_n définies sur $[1,+\infty[$ par

$$F_n(x) = \int_1^x \frac{f(t)}{t^{n+1}}\,\mathrm{dt} \qquad \text{et} \qquad G_n(x) = \int_1^x \frac{(\ln(t))^2}{t^{n+1}}\,\mathrm{dt}$$

a. Montrer que pour tout $x \in [1,+\infty[$ on a $0 \leq F_n(x) \leq 4\frac{\alpha-1}{n\alpha^2}$ et en déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} F_n(x)$

b. Montrer que pour tout $x \in [1,+\infty[$ on a $G_n(x) = \frac{1}{n^3} G(x^n)$ puis déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} G_n(x)$

c. Montrer que $\sum_{k=1}^{n} G_k(x) = F(x) - F_n(x)$

d. On pose $u_n = \lim\limits_{x\to+\infty} F_n(x)$. Montrer que $l - u_n = 2\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^3}$

e. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^3} = \frac{l}{2}$

Exercice 5

Partie A

Soit g la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $g(x) = x - \sqrt{x} + \frac{1}{2}\ln(x)$

1. Etudier le signe e de $\sqrt{x} - 1$ et $\ln(\sqrt{x})$

2. En déduire le signe de $g(x)$

Partie B

Soit f la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par $f(x) = 2e^{\sqrt{x}} - e^{x} - 1$ et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$

1.a. Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

b. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$ et interpréter graphiquement le résultat

2. a. Montrer que pour tout $x > 0$ on a $\frac{f(x)}{x} = \frac{2}{\sqrt{x}}\left(\frac{e^{\sqrt{x}}-1}{\sqrt{x}}\right) - \frac{e^{x}-1}{x}$

b. Etudier la dérivabilité de f a droite en 0 et interpréter graphiquement le résultat

3a. Montrer que pour tout $x > 0$ on a $f'(x) = e^{x}\left(e^{-g(x)} - 1\right)$

b. Dresser le tableau de variation de f

4a. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $[0,+\infty[$ et que $\frac{3}{2} < \alpha < 2$

b. Construire (C)

5. Soit h la restriction de f sur $[1,+\infty[$

a. Montrer que h admet une fonction réciproque h^{-1} définie sur un intervalle J que l'on précisera

b. Montrer que h^{-1} est dérivable en 0 et $(h^{-1})'(0) = \frac{\sqrt{\alpha}}{e^{\sqrt{\alpha}} - \sqrt{\alpha}e^{\alpha}}$

c. Tracer $C_{h^{-1}}$

Partie C

Soit F la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $F(x) = \int_0^{\ln^2(x)} e^{\sqrt{x}}dx$

1.a. Montrer que F est dérivable sur $]0,+\infty[$ et calculer $F'(x)$

b. En déduire l'expression de F

2. Calculer alors l'aire de la partie du plan limité par (C) et les droites d'équations respectives

$x = 0.$, $x = 1.$ Et $y = 0$