Exercice n°1 :

Soit h la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par $h(x) = xe^x - e^x + 1$

1°) a) Mq $\forall x \in [0,+\infty[$, $h(x) = \int_0^x te^t\,dt$.

b) Mq alors que $\forall x \geq 0$, $\frac{1}{2}x^2 \leq h(x) \leq \frac{1}{2}x^2 e^x$

c) En déduire $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{h(x)}{x^2}$.

2°) Soit f la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par $f(x) = e^{\sqrt{x}} - (e+1)\sqrt{x}$

on désigne par $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans un R.O.N $(O,\vec{i},\vec{j})$

a) Vérifier que $\forall x > 0$, $\frac{f(x)-1}{x} = \frac{e^{\sqrt{x}}-1}{\sqrt{x}} - \frac{h(\sqrt{x})}{x} - \frac{e}{\sqrt{x}}$.

b) Mq alors que $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{f(x)-1}{x} = -\infty$. Interpréter.

c) Mq $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$. Interpréter.

3°) a) Dresser T.V de f.

b) Mq l'éq : $f(x) = 0$ admet exactement deux solutions α et β.

Vérifier que $0 < \alpha < 1 < (\ln^2(e+1)) < \beta$.

c) On pose pour $x > 0$, $u(x) = \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$. Mq $f(x) = 0 \Leftrightarrow u(x) = e+1$

d) Dans la feuille annexe on a tracé dans le repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ la courbe (Γ) de la fonction u

Construire dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ les points de $\mathcal{C}$ d'abscisse α et β puis tracer $(\mathcal{C})$. (on prendra $\ln(e+1) \simeq 1{,}31$)

4°) Soit A : l'aire de la partie du plan limitée par $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses

a) Mq $\int_\alpha^\beta e^{\sqrt{t}}\,dt = 2\left(e^{\sqrt{\beta}}(\sqrt{\beta}-1) - e^{\sqrt{\alpha}}(\sqrt{\alpha}-1)\right)$.

b) En déduire la valeur de A.

B] on donne ci-dessous, le tableau de variation de la fonction f_n définie par : $f_n(x) = e^{\sqrt{x}} - (e+\frac{1}{n})\sqrt{x}$.

pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

x	0		$\ln^2(e+\frac{1}{n})$		$+\infty$
signe de $f'_n(x)$		$-$	0	$+$	
Variation de f	1	$\searrow$		$\nearrow$	$+\infty$

1°) a) Mq $f_n(\ln^2(e+\frac{1}{n})) < 0$

b) Mq $f_n(x) = 0$ admet exactement deux solutions α_n et β_n.

vérifier que $0 < \alpha_n < 1 < \ln^2(e+\frac{1}{n}) < \beta_n$.

vérifier que $f_{n+1}(\alpha_n) > 0$ et que $f_{n+1}(\beta_n) > 0$

2°) a) Mq $f_{n+1}(\alpha_n) > 0$ et que la suite (α_n) est strictement croissante

b) En déduire que la suite (α_n) est strictement croissante et la suite (β_n) est strictement décroissante.

c) Mq (α_n) et (β_n) sont convergentes.

3°) a) Mq les restrictions u_1 et u_2 de u respectivement à $I_1 = [0,1]$ et $I_2 = [1, +\infty[$ réalisent des bijections de I_1 et I_2 sur des intervalles que l'on déterminera.

b) vérifier que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_1(\alpha_n) = e + \frac{1}{n}$. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n$

c) vérifier que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_2^{-1} \circ u_1(\alpha_n) = \beta_n$. Déterminer alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \beta_n$

Exercice n°2

Soit p un nombre premier tel que $p \geq 5$

1°) Mq $p^2 \equiv 1 \pmod 3$

2°) a) Mq il existe un entier naturel q tel que $p^2 - 1 = 4q(q+1)$

b) En déduire que $p^2 \equiv 1 \pmod 8$

3°) En utilisant le lemme de Gauss, Mq $p^2 \equiv 1 \pmod{24}$

4°) Soit a un entier naturel tq a et 24 sont premiers entre eux

a) Mq $a^2 \equiv 1 \pmod{24}$

b) Déterminer le reste modulo 24 de 883

c) Existe-t-il des entiers naturels $a_1, a_2, \dots, a_{23}$ tels que pour tout $k \in \{1, 2, 3, \dots, 23\}$ a_k et 24 sont premiers entre eux et $\sum_{k=1}^{23} a_k^2 = 883$

6°) Soit le couple $(x,y) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ solution de l'éq : $(E) : px + y = 883$

a) Mq $p < 883$.

b) Mq p ne divise pas y.

c) Mq $y^{p-1} \equiv 1 \pmod p$ puis en déduire que p divise 882

d) Mq $p = 7$.

e) Determiner alors les couples $(x,y) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ qui vérifient $(E) : px + y^{p-1} = 883$

Exercice n°4

Le plan est orienté dans le sens direct

Soit OBC un triangle équilatéral direct inscrit dans le cercle Γ, A est le symétrique de C par rapport à O

J et K sont les points de Γ diamétralement opposés respectivement à B et C.

1°) Determiner la nature et les éléments caractéristiques de $R = S_{(OJ)} \circ S_{(OK)}$

2°) Soit T la translation de vecteur $\overrightarrow{OB}$

Determiner la dte Δ telle que $T = S_\Delta \circ S_{(OJ)}$

3°) Mq $T \circ R$ est la rotation de centre K et d'angle $-\frac{2\pi}{3}$

4°) Soit E le point tel que $\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{BO}$.

a) Mq ABE est équilatéral de centre O

b) Soit f une isométrie du plan qui transforme A en C et O en B. On pose $g = t_{\overrightarrow{BO}} \circ f$.

a) Déterminer $g(O)$ et $g(A)$

b) Mq g est soit la symétrie orthogonale d'axe (OB) soit la rotation de centre O d'angle $-\frac{2\pi}{3}$.

c) Caractériser alors les isométries f du plan qui transforme A en C et O en B.

d) On pose $h = t_{\overrightarrow{OB}} \circ S_{(OB)}$ et $r = R(K, -\frac{2\pi}{3})$

i) Déterminer ...

ii) En déduire l'ensemble des points M du plan tels que $h(M) = R(M)$

Exercice n°5:

On considère la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x)=\int_0^x e^{-t^2}dt$

A) 1°) Justifier l'existence de $F(x)$ sur $\mathbb{R}$

2°) Etudier le sens de variation de F et mq F est impaire

3°) a) vérifier que $\forall t \in [2,+\infty[$ on a $e^{-t^2} \leq e^{-2t}$

En déduire que $\forall x \geqslant 2$ on a :

$$F(x) \leq \frac{1-e^{4-2x}}{2e^4} + \int_0^2 e^{-t^2}dt$$

b) Prouver que $\forall x \geqslant 2$; $F(x) \leq \frac{1}{2e^4} + \int_0^2 e^{-t^2}dt$

4°) mq F est majorée sur $\mathbb{R}$ et $\lim_{x \to +\infty} F(x) = L$ (fini)

B) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\int_0^{\pi/4} e^{-\frac{x}{\cos^2 t}}dt$

1°) mq $\forall x \geqslant 0$ on a $0 \leq f(x) \leq e^{-x}$ et calculer $\lim_{x \to +\infty} f(x)$

2°) on pose $\forall x \in \mathbb{R}$ et $\forall t \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

$g(t) = F(x \tan t)$.

a) mq g est dérivable sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

et que $g'(x) = \frac{x}{\cos^2 t} \cdot e^{-x^2\tan^2 t}$

b) En déduire $\forall x \in \mathbb{R}$ on a $F(x) = x\int_0^{\pi/4} \frac{e^{-x^2\tan^2 t}}{\cos^2 t}dt$

3°) on admettant que f est dérivable sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

et que $f'(x) = -\int_0^{\pi/4} \frac{e^{-\frac{x}{\cos^2 t}}}{\cos^2 t}dt$

mq $\forall x \in \mathbb{R}$ on a $[f(x^2)]' = -2e^{-x^2}F(x)$.

4°) Soit $h(x) = f(x^2) + [F(x)]^2$ $\forall x \in \mathbb{R}$

a) mq h est constante et calculer cette constante b°) En déduire que $\lim_{n \to +\infty} F(n) = \frac{\ldots}{2}$

c) Dresser T.V de F et donner l'allure de la Courbe F

C°) on pose $\forall n \in \mathbb{N}$ et $x \geq 0$, $U_n = \int_0^x t^n e^{-t^2} dt$

et $V_n = \lim_{x \to +\infty} U_n$.

1°) Vérifier que $V_0 = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

2°) a) Mq $\forall n \geq 2$ $V_n = \frac{n-1}{2} V_{n-2}$.

b) En déduire que $V_n \cdot V_{n+1} = \frac{n! \sqrt{\pi}}{2^{n+1}}$.

c) Déterminer alors les termes V_3 et V_4 de la suite (V_n)

Exercice n°6 :

Soit $m \in \mathbb{C}$ tq $|m| = 2$. On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation :

(E_m) : $mz^2 - 2i(6-m)z + 8(2-\bar{m}) = 0$

1°) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E_m). On donne le plan P est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. les points A, M, N et P d'affixes respectives : $z_A = i$, $z_M = m$

$z_N = 2i\bar{m}$ et $z_P = i\bar{m} - 2i$

2°) on pose $\arg(m) \equiv \theta\ [2\pi]$ avec $\theta \in]0, \pi[$

a) Écrire z_P sous forme exponentielle.

b) Mq les points A, N et P ne sont pas alignés

c) Existe-il une position de M pour laquelle le triangle ANP est rectangle en A ?

d) Mq $MN^2 = 4(5 - 4\sin(2\theta))$.

Déterminer la valeur de θ pour laquelle MN est minimale

3°) Soit $f : P \longrightarrow P$, $M(z) \longmapsto M'(z')$ tel que $z' = i\bar{z} - 2i$

a) Mq f est une isométrie du plan.

b) Déterminer l'ensemble des points invariants par f

c) En déduire que f est une symétrie glissante

d) Déterminer alors l'ensemble des points P lorsque m varie.

Annexe Ex 1