Série similitudes

Exercice 1 :

Dans le plan orienté, on considère un carré $ABCD$ de sens direct et de centre I. Soit E le point tel que DCE est équilatéral direct. On pose $J = D * C$, $O = A * D$ et $K = D * E$.

1) Soit $f = R_{\left(D,\frac{\pi}{3}\right)} o \ S_{(IJ)}$.

   a) Déterminer $f(C)$ et $f(D)$.

   b) Montrer que f est une symétrie glissante dont on précisera la forme réduite.

2) Soit $g = t_{\overrightarrow{BD}} \circ S_{(AB)}$. Caractériser g.

3) Soit $D' = h_{(A,-2)}(B)$ et H le projeté orthogonal de A sur (DD'). On donne les points définis par : $O' = A * D'$, $H' = S_O(H)$ et $H_1 = S_{O'}(H)$.

   a) Montrer que $\overrightarrow{H_1H'} = 2\overrightarrow{O'O}$.

   b) Soit φ la similitude directe telle que $\varphi(D) = D'$ et $\varphi(H) = H_1$. Déterminer l'angle, le centre puis le rapport de φ.

   c) Déterminer $\varphi(O)$ et $\varphi(H')$.

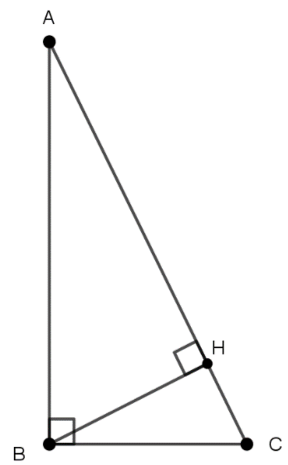
4) Soit $\mathscr{C}$ le cercle de diamètre $[AD]$ et $\mathscr{C}'$ celui de diamètre $[AD']$ et $M \in \mathscr{C} \setminus \{H, H'\}$.

   a) Soit $M' = \varphi(M)$. Montrer que $(\widehat{\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OA}}) \equiv (\widehat{\overrightarrow{O'M'}, \overrightarrow{O'A}}) \quad [2\pi]$.

   b) Montrer que M, H et M' sont alignés.

Exercice 2 :

ABC est un triangle rectangle direct en B tel que $BA = 2BC$. On note H le projeté orthogonal de B sur (AC) et $K = S_{(BC)}(H)$. Soit f la similitude directe qui envoie A en B et B en C.



1. a) Déterminer l'angle et le rapport de f.
   b) Montrer que $f(H) = H$.
2. Soit g la similitude indirecte qui envoie A en B et B en C.
   a) Montrer que g admet un unique point invariant noté O.
   b) Montrer que O est un point de (AC).
3. a) Caractériser l'application $g \circ f^{-1}$.
   b) En déduire que $g(H) = K$.
   c) Montrer que O est un point de (BK). Construire O.
4. Soit I le barycentre des points pondérés $(A,1)$ et $(B,2)$.
   a) Montrer que l'axe de g est la droite (OI).
   b) Montrer que $g(I) \in (BC) \cap (OI)$.

Exercice 3 :

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$. On note S la similitude directe d'écriture complexe : $z' = \frac{1}{2}iz + \frac{1-3i}{2}$.

1) Déterminer le rapport k, une mesure de l'angle θ et l'affixe du centre Ω.
2) On note M_0 le point d'affixe $1+4\sqrt{3}+3i$. Pour tout entier naturel n, on note le point $M_{n+1} = S(M_n)$.
   a) Montrer par récurrence que $\Omega M_n = \frac{1}{2^{n-3}}$.
   b) Déterminer l'entier n_0 à partir duquel le point M_n appartient au disque de centre Ω et de rayon 0.01.
3) On pose $d_n = M_n M_{n+1}$ et $u_n = \sum_{k=0}^{n} d_k$.
   a) Montrer que la suite d est géométrique.
   b) Déterminer la limite de u.

Exercice 4 :

On considère un triangle ABC rectangle et isocèle tel que $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$.

On pose $D = S_A(C)$ et $E = S_B(D)$.

1) Soit S la similitude directe qui transforme A en B et B en C.
   a) Déterminer le rapport et l'angle de S.
   b) Montrer que $S(C) = D$. En déduire $S(D)$.
   c) Soit Ω le centre de S. Montrer que la similitude directe de centre Ω de rapport 2 et d'angle $-\frac{\pi}{2}$ transforme A en C et C en E. Construire alors Ω et vérifier que A, E et Ω sont alignés.
2) Le plan est rapporté au R.O.N.D $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$. Déterminer l'application complexe associée à S. En déduire l'affixe de Ω.
3) Soit σ la similitude indirecte telle que : $\sigma(A) = B$ et $\sigma(B) = C$.
   a) Montrer que D est le centre de σ.
   b) On pose $\varphi = \sigma \circ S^{-1}$. Montrer que φ est une symétrie orthogonale que l'on précisera. Déterminer alors $\sigma(C)$.
4) Soit f l'application du plan qui à tout point $M(z)$ associe le point $M'(z')$ tel que : $z' = (-1+i)\bar{z} + 1$. Montrer que $f = \sigma$.

Exercice 5 :

On considère dans le plan orienté un triangle OAB tel que $(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}}) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$ et $OA = 2OB$. Soit Ω le projeté orthogonal de O sur (AB) et $E = S_{(OA)}(\Omega)$ et $F = S_{(OB)}(\Omega)$.

1) Montrer que $(FB) \perp (FO)$ et $(AE) \perp (OE)$.
2) Caractériser $S_{(OA)} \circ S_{(OB)}$ et en déduire que O est le milieu de $[EF]$.
3) Soit S la similitude directe telle que : $S(O) = A$ et $S(B) = O$.
   a) Déterminer le rapport et l'angle de S.
   b) Montrer que Ω et le centre de S.
   c) Montrer que $S(F) = E$ et que $EF = EA$.
4) Soit f la similitude indirecte telle que $f(F) = \Omega$ et $f(\Omega) = E$.
   a) Déterminer le rapport de f.
   b) Soit I le centre de f. Construire I.
   c) Soit $J = S_F(I)$. Montrer que l'axe de f est la médiatrice de $[\Omega J]$.

Exercice 6 :

$ABCD$ étant un rectangle de centre O tel que $(\overrightarrow{AB}\,\widehat{,}\,\overrightarrow{AD}) \equiv \frac{\pi}{2}\ (2\pi)$ et $AB = 1$ et $AD = 2$. On pose E et F les milieux respectifs des segments $[AD]$ et $[BC]$.

Soit f la similitude directe telle que $f(A) = F$ et $f(B) = D$.

1) Déterminer le rapport et l'angle de f.
2) Déterminer $f((BC))$.
3) Soit $\{I\} = (AB) \cap (DF)$ et K le centre de f. Montrer que K appartient aux cercles circonscrits au triangles IAF et IBD. Construire alors K.
4) Soit g la similitude directe de centre F telle que $g(B) = D$. Caractériser $h = fog^{-1}$.
5) Soit S la similitude indirecte telle que $S(A) = F$ et $S(C) = E$. Caractériser S.
6) Le plan etant rapporté à un R.O.N.D $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AE})$. Pour tout point $M(z)$ on pose $M'(z')$ tel que $f(M) = M'$.
   a) Exprimer z' en fonction de z. En déduire les coordonnées de K.
   b) Déterminer $f(E)$. En déduire l'ensemble C des points $M(z)$ tels que : $\left|(i-1)z+1+i\right| = \sqrt{2}$.

Exercice 7 :

Dans le plan orienté $\mathscr{P}$, on considère un rectangle $ABCD$ de centre O tel que $(\overrightarrow{AB}\,\widehat{,}\,\overrightarrow{AD}) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$ et $AB = 2AD$. On note I le milieu de $[AB]$ et J celui de $[ID]$. E le symétrique de I par rapport à A et $\mathscr{C}$ le cercle de centre A et passant par I. (Figure annexe 1).

1) Soit S la similitude directe de centre D telle que $S(I) = A$.
   a) Déterminer le rapport et l'angle de S.
   b) Déterminer $S(C)$.
2) Soit f la similitude directe qui transforme D en I et A en C.
   a) Montrer que f admet un centre Ω et préciser un angle de f.
   b) Montrer que Ω est un point de $\mathscr{C}$.
   c) Déterminer $f(\mathscr{C})$. En déduire que Ω et I sont symétriques par rapport à (AC).

3) La perpendiculaire à (ΩD) en Ω recoupe $f(\mathscr{C})$ en F.
   a) Montrer que $f(I)=F$.
   b) Montrer que $ICFD$ est un carré.
4) Soit $\varphi = Sof$ et K le projeté orthogonal de D sur (ΩE).
   a) Caractériser φ.
   b) Montrer que $J\Omega K$ et rectangle et isocèle en J.
5) Soit g la similitude indirecte telle que $g(\Omega)=B$ et $g(O)=C$.
   a) Montrer que g admet un centre.
   b) On pose $h = goS_{(AC)}$. Déterminer $h(O)$ et $h(I)$ puis caractériser h.
   c) Donner la forme réduite de g.

Exercice 8 :

On considère les transformations f est g qui à tout point $M(z)$ associent respectivement $M'(z')$ et $M''(z'')$ tels que : $z'=2i\overline{z}-3$ et $z''=i\overline{z}+2$. Soit $A(i)$ et $B(1+2i)$.

1) Caractériser chacune des transformations f, g et $h = g \circ f$.
2) Déterminer les points $M(z)$ tels que l'affixe de $f(M)$ est solution de l'équation complexe : $2z^2-iz+1=0$.
3) Soit S la similitude directe telle que $S(O)=A$ et $S(A)=B$. On considère les points A_n définis par : $A_0=O$ et $A_{n+1}=S(A_n)$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.
   a) Caractériser S. On notera Ω le centre de S.
   b) On note z_n l'affixe de A_n. Montrer que $z_n = 1-(1-i)^n$.
   c) Comparer ΩA_n et A_nA_{n+1} et déterminer une mesure de $(\overrightarrow{\Omega A_n},\overrightarrow{A_nA_{n+1}})$.
   d) En déduire une construction de A_{n+1} connaissant A_n. Construire A_3 et A_4.
   e) Déterminer les points A_n appartenant à la droite (ΩB).