La musique est une mathématique sonore, la mathématique une musique silencieuse. *Edouard Herriot*

Exercice 1 :

Répondre par vrai ou faux

1) Le nombre $21^{2017} + 10^{2016}$ est divisible par 11.
2) Soit a et b deux entiers tels que 4a +3b = 5 alors pgcd(a, b) = 5.
3) Si un entier n est divisible par 4 et par 6 alors il est divisible par 12.
4) Le quotient, dans la division euclidienne de - 52 par – 7 est 8

Exercice 2 : (3 points)

Pour chacune des questions suivantes une seule des trois réponses proposées est exacte.
Indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondante à la réponse choisie.

En justifiant votre réponse.

1) L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. L'ensemble des points M(x; y; z) tels que : $\begin{cases} 2x - 6y + 2z - 7 = 0 \\ -x + 3y - z + 5 = 0 \end{cases}$ est

a) une droite b) un plan c) le vide

2) Soit f la fonction définie sur IR par $f(x) = x^2\ln(e^x + 1)$

a) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$, b) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$,

c) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 1$

3) Soit $m \in IR$, on considère l'équation d'inconnue réelle x, (E) $e^{2x} - 2me^x + 1 = 0$
a) (E) n'admet jamais une seule solution
b) (E) admet deux solutions positives pour m > 1
c) (E) n'admet pas de solutions pour m< -1.

Exercice :3

Pour tout n ≥ 1, $I_n(x) = \dfrac{1}{n!}\displaystyle\int_0^x t^n e^{1-t}\,dt$, $x \in IR$

1)Calculer $I_1(x)$
2)a)En intégrant $I_n(x)$ par parties,
Calculer $I_{n+1}(x) - I_n(x)$, (n ≥1)

b)Déduire que $I_n(x) = e - \left(1 + \displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} \frac{x^k}{k!}\right)e^{1-x}$.

3)On suppose maintenant que x est un élément fixé de]0, 1]
a)Démontrer que, pour tout n > 0,
$0 \le I_n(x) \le \dfrac{1}{n!} e\,(1-e^{-x})$

b)Déduire alors $\lim_{n\to+\infty} I_n(x)$

c)Montrer alors que $\lim_{n\to+\infty}\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{k=n}\frac{x^k}{k!}\right) = e^x - 1$.

Exercice :4

Soit ABCD un carré de centre O tel que

$(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}}) \equiv \frac{\pi}{2}(2\pi)$.

On désigne I = A * B et J = A * D

On note s la similitude directe tels que

s(D) = O et s(C) = I.

1) a) Déterminer le rapport et l'angle de s.
b) Soit Ω le centre de s.
Trouver une construction géométrique de Ω.
2) a) Préciser les images respectives des droite (BD) et (BC) par s .
b) Déterminer alors s (B) et s (A) et s o s (B) .
c) Montrer que Ω est le barycentre des points pondérés (B , 1) et (J , 4).
3) On suppose dans cette question que $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$ un repère orthonormé direct
a) Déterminer l'application complexe associée à s.
b) En déduire l'affixe z_0 de Ω centre de s.

4) Soit R la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$ et h =R o s.
a) Préciser h (B) puis caractériser h.
b) Soit Ω' le milieu de $[\Omega B]$.
Montrer que $O\Omega\Omega'$ est rectangle et isocèle.

Exercice 5 :(4 points)

Dans l'ensemble des nombres complexes,

on considère l'équation :

(E) : z² - z(3m – i)m + 2m²(1+m²) = 0,

où m est un paramètre réel.

I/ Résoudre l'équation (E).

II/ Dans le plan P muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On considère les points

M(m(m + i)) et N(2m(m – i)).

1) a/ Montrer que M varie sur une parabole P quand m varie sur IR.

b/ Caractériser la parabole P.
c/ Montrer que par le point I(-1, 0) passe deux tangentes T_1 et T_2 à la parabole P.
d/ Tracer la parabole P ainsi que les tangentes T_1 et T_2.

2) a/ Déterminer l'affixe du point G image du point N par la rotation de centre I et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

b/ Déduire que le point G est l'image du point M par une similitude indirecte g que l'on caractérisera.

Exercice 6:

Soit f la fonction définie sur IR par : $f(x)=(1-x)e^{2x}$.

On désigne par $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans le plan rapporté un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1°) Dresser le tableau de variation de f.

2°)a) Montrer que $\mathscr{C}$ admet un point d'inflexion I qu'on précisera.

b)Donner une équation cartésienne de la tangente T à $\mathscr{C}$ au point I.

c)Tracer T et $\mathscr{C}$.

3)Calculer l'aire du domaine limité par $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations x=0 et x= 1.

4°)On pose $I_n=\int_0^1 (1-x)^n e^{2x}dx$, $\forall n\in IN^*$

a)Mque $\forall n\in IN^*$, on a : $\frac{1}{n+1}\le I_n\le\frac{e^2}{n+1}$.

En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$

b)M que $\forall n\in IN^*$, on a : $2I_{n+1}=(n+1)I_n-1$.

En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} nI_n$.

5°) Pour tout $n\in IN^*$, $U_n=\frac{2^n}{n!}I_n$.

a)M par récurrence que $\forall n\in IN^*$, on a : $\frac{2^{n-1}}{n!}\le 1$.

b)En déduire que $\forall n\in IN^*$, on a : $U_n\le\frac{2e^2}{n+1}$.

a) Calculer alors $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$.

6°)a)Mque $\forall n\in IN^*$, on a :$U_{n+1}=-\frac{2^n}{(n+1)!}+U_n$.

b)En déduire que $\forall n\in IN^*$, on a :

$$U_n=\frac{1}{2}\left[e^2-\sum_{k=0}^{n}\frac{2^k}{k!}\right].$$

c)En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{2^k}{k!}$

Exercice :7

A)Soit la fonction f définie sur]-1, 1[par :

$$f(x)=\int_0^x\frac{t^2}{1-t^2}dt$$

1)a)Justifier l'existence de f.

b)Prouver qu'il existe trois réels α,β et φ tel que $\forall t\in IR-[-1,1]$, $\frac{t^2}{1-t^2}=\alpha+\frac{\beta}{1-t}+\frac{\varphi}{1+t}$

c)Déduire que $\forall x\in]-1,1[$, $f(x)=-x+\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$

2)Etudier les variations de f et construire sa courbe C dans un repère orthonormé.

3)a)Montrer que $\forall x\in IR^*_+$ et $\forall k\in IN^*$ on a :

$\ln(x)\le -1+\frac{x}{k}+\ln k$

b)Déduire que $\forall k\in IN^*$, $\int_{-\frac{1}{2}+k}^{\frac{1}{2}+k}\ln(x)\,dx\le\ln(k)$

et que $\forall n\in IN^*$ $\int_{\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}\ln(x)\,dx\le\ln(n!)$

c)En déduire que $\forall n\in IN^*$,

$\ln(n!)\ge(n+\frac{1}{2})\ln(n+\frac{1}{2})-n+\frac{1}{2}\ln 2$

4)Soit la suite u définie par sur IN* par :

$u_n=n+\ln(n!)-(n+\frac{1}{2})\ln(n)$

a)Montrer que $\forall n\in IN^*$, $u_n\ge\frac{1}{2}\ln 2$,

b)Vérifier que $\forall n\ge 1$, on a:

$u_n-u_{n+1}=(2n+1)f\left(\frac{1}{2n+1}\right)$

c)Déduire que la suite u est convergente.

B)Soit (v_n) la suite définie par :

$V_0=\int_0^1\sqrt{(1-x)}\,dx$ et $\forall n\in IN^*$, $V_n=\int_0^1 x^{n/2}\sqrt{1-x}\,dx$

1)Calculer v_0

2)a)Définir l'ensemble des points M(x,y) tel que $y^2-x(1-x)=0$

b)Déduire que $v_1=\frac{\pi}{8}$

3)a)Prouver que la suite (v_n) est décroissante .

b)Déduire que la suite v est convergente.

4)a)Prouver par une intégration par partie que $\forall n\in IN$, $v_{n+2}=\frac{n+2}{n+5}v_n$

b)Déduire que $\forall n\in IN$, $\frac{n+2}{n+5}\le\frac{v_{n+1}}{v_n}\le 1$

et $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{v_{n+1}}{v_n}=1$

Exercice :8

I/Soit x un réel de]-1, + ∞[, on pose $\varepsilon_2(x)=\int_0^x \frac{t^2}{1+t}dt$

1)a) $x\in IR+$, mque, $0 \le \varepsilon_2(x) \le \frac{x^3}{3}$

b) $x\in]-1, 0]$, mque $\frac{x^3}{3(1+x)} \le \varepsilon_2(x) \le 0$

c) En déduire que $\lim_{x\to 0}\frac{\varepsilon_2(x)}{x^2}=0$

2)a) Démontrer que pour tout x de]-1, +∞[

$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \varepsilon_2(x)$

b)Calculer $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}$

3) Soit f la fonction numérique à variable réelle définie sur]-1, +∞[par $\begin{cases} f(x)=\frac{\ln(1+x)}{x} & \text{si } x\neq 0 \\ f(0)=1 \end{cases}$

a) Mque f est continue et dérivable sur]-1, +∞[

b) Etudier les variations de la fonction h définie sur]-1, +∞[par $h(x) = x - (x+1)\ln(1+x)$

En déduire le signe de h(x) pour $x\in]-1, +\infty[$

c)Etudier les variations de f et tracer sa courbe représentative (C) dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(o, \vec{i}, \vec{j})$.

II/ Soit $x \in]-1, 0]$ et $n \in IN^*$, on pose $\varepsilon_n = \int_0^x \frac{t^n}{1+t}dt$

1)Etudier le signe de $\varepsilon_n(x)$ suivant n est pair ou impair.

b)Etudier le signe de $\varepsilon_n(x) - \frac{x^{n+1}}{(n+1)(x+1)}$,

en déduire que $|\varepsilon_n(x)| \le \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)(x+1)}$

2)a) Mque $\forall t \neq -1$

$\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - t^3 + \ldots + (-1)^{n-1}t^{n-1} + \frac{(-1)^n t^n}{1+t}$

b)En déduire que ∀x de]-1, 0] et pour tout n de IN*

$\ln(1+x)= x - \frac{x^2}{2} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + (-1)^n \varepsilon_n(x)$

3) On considère la suite u définie par:

$u_n = \frac{1}{2}\left[1 + \frac{1}{2.2} + \frac{1}{3.2^2} + \ldots + \frac{1}{n.2^{n-1}}\right]$

Trouver $\lim_{n\to+\infty}(u_n)$

Exercice 9 :

Soit f la fonction numérique définie par :

$f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2-1})$.

On désigne par (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) a)Montrer que f est définie sur [1, + ∞[.

b) Etudier la dérivabilité de f à droite en 1. Interpréter graphiquement.

2) a. Montrer que f est dérivable sur]1, +∞[et que $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$.

b)Dresser le tableau de variation de f.

3) a. Calculer $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

b. Tracer la courbe (C).

4) a. Montrer que f est bijective et tracer, dans le même repère, la courbe (C ') de sa fonction réciproque f^{-1}.

b)Montrer que pour tout $x\in IR_+$, $f^{-1}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

5) L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.Soit S le solide obtenu par la rotation de la partie de (C') relative à [0, 1] autour de l'axe $(O, \vec{i})$. Calculer le volume de S.

6) Calculer l'aire de la partie du plan limitée par la courbe (C) , l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives: x = 1 et x = 2.

Exercice 10:

I) On considère l'équation (E) : 7x + 18y = 1 d'inconnues x et y entiers relatifs.

1°) Justifier pourquoi (E) possède-elle au moins une solution dans ZxZ? (Sans en proposer une solution particulière).

2°) Déterminer une solution particulière (x_0, y_0) de (E).

3°) Résoudre (E) dans ZxZ.

II) Pour tout entier naturel non nul n, on appelle U_n l'entier naturel qui s'écrit avec n chiffres 1

Exemple : U_1 =1 ; U_2 = 11 ; U_4= 1111.

1°) Pour chacune des affirmations ci - dessous dire si elle est vraie ou fausse en justifiant :

a)Pour tout entier $n \geq 2$, U_n est premier.

b)Pour tout entier $n \geq 2$, $U_n \equiv 1$ [mod5]

c)U_6 est multiple de U_3.

2°) a) Pour $n \in IN^*$, Calculer $(U_{n+1} - 10.U_n)$ et en déduire que U_n et U_{n+1} sont premiers entre eux.

b) Vérifier que pour tout $n \in IN^*$, $9.U_n = 10^n - 1$

c) Démontrer que si n est un multiple de d alors $10^n - 1$ est un multiple de $10^d - 1$.

En déduire que si d divise n alors U_d divise U_n.

d) Démontrer que si U_n est premier alors n est premier. Que pensez-vous de la réciproque ?

3°) Recherche du PGCD(U_7, U_{18})

a) Déduire de I) un couple d'entiers naturels (p , q) tel que : 7p - 18q = 1

b) Démontrer que $(10^{7p} - 1) - 10(10^{18q} - 1) = 9$ et en déduire que : $U_{7p} - 10.U_{18q} = 1$.

c) Déduire de 2°) c) le PGCD(U_7, U_{18})

Exercice :11

On considère la suite définie sur IN*

par : $U_n = \int_1^e \frac{(\ln x)^n}{x^2}dx$.

1) a) Montrer que pour tout $n \in IN^*$, $U_n \geq 0$.

b) Montrer que U est décroissante et en déduire qu'elle est convergente.

2) a) En intégrant par parties, calculer U_1.

b) Montrer que pour tout $n \in IN^*$,

$$U_{n+1} - (n+1)U_n = -\frac{1}{e}$$

c) En déduire la valeur de U_2.

3) a) Montrer que pour tout $n \in IN^*$, $0 \leq U_n \leq \frac{1}{ne}$

b) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$

Exercice 12:

1°) Dans Z², on considère l'équation

(E) : 195x – 232y = 1.

a)Déterminer le PGCD des deux nombres 195 et 232.

b)Montrer que l'ensemble des solutions de l'équation (E) est : S = {(163 + 232k, 137 + 195k), $k \in Z$}.

c)Déterminer l'unique entier naturel d vérifiant $0 \leq d \leq 232$ et $195d \equiv 1$ [mod232].

2°) Montrer que 233 est un nombre premier.

3°) Soit a et b deux entiers naturels inférieurs ou égaux à 232.

a)Déterminer le reste de la division euclidienne de a^{232} par 233.

b)Montrer que $a^{195} \equiv b$ [mod233] si et seulement si $a \equiv b^{163}$ [mod233].

Exercice :13

Le plan est orienté dans le sens direct.

Soit ABCD un carré de centre O tel que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$

On note $J = A * D$, $K = C * D$ et $F = S_D(C)$.

La perpendiculaire en D à la droite (BD) coupe droite (OJ) en un point E.

1) Soit S la similitude directe telle que S(A) = J et S(B) = D.

a- Déterminer le rapport et l'angle de S.

b- Déterminer les images des droites (BD) et (AD) par la similitude S. En déduire S(D).

2) On désigne par ζ et ζ' les cercles de diamètres respectifs [AJ] et [BD].

a- Soit Ω le centre de S. Montrer que $\Omega \in \zeta \cap \zeta'$ puis construire le point Ω.

b- Montrer que les points Ω , B et E sont alignés.

3) Soit σ la similitude indirecte telle que $\sigma(O) = A$ et $\sigma(K) = B$.

a- Déterminer le rapport de σ.

Montrer que C est le centre de σ.

c- Déduire l'axe de σ.

4- Soit $\varphi = S o \sigma$.

a- Déterminer $\varphi(O)$ et $\varphi(K)$.

a- Caractériser alors φ.

Exercice :14

1) Soit h la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par :

$h(x) = a\ln^2(x) + b\ln(x)$; a et b deux réels.

Déterminer les réels a et b sachant que h admet un minimum en $e^{\frac{1}{2}}$ égale à $(-\frac{1}{4})$.

2) Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par :

$f(x) = \ln^2(x) - \ln(x)$.

On désigne par c la courbe représentative de dans un plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

a- Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

b- Montrer que tout $x \in]0,+\infty[$; $f'(x) = \frac{2\ln(x) - 1}{x}$.

c- Dresser le tableau de variation de f.

d- Préciser les points d'intersection de c avec l'axe des abscisses.

e- Tracer la courbe c.

(On précisera les branches infinies).

3) Soit g la restriction de f à l'intervalle $I =]0, e^{\frac{1}{2}}]$.

a- Montrer que g est une bijection de I sur un intervalle J que l'on précisera.

On désigne par g^{-1} la fonction réciproque de g.

b- Montrer que l'équation $g(x) = x$ admet dans I une unique solution α et que $\alpha \in]0,1]$.

c- Tracer la courbe c' de g^{-1} dans le même repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

d- Montrer que tout $x \in J$; $g^{-1}(x) = e^{\frac{1}{2}-\sqrt{x+\frac{1}{4}}}$.

4) Soit $A = \int_{\alpha}^{1} f(x)\,dx$.

a- Interpréter graphiquement A

b- Calculer A.

c- En déduire la valeur de $K = \int_0^{\alpha} e^{-\sqrt{x+\frac{1}{4}}}\,dx$.

Exercice :15

Le plan est orienté dans le sens direct. Soit ABC isocèle en A tel que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv \frac{2\pi}{3} [2\pi]$

Soit O le centre du cercle $\mathscr{C}$ circonscrit au triangle ABC, I le milieu du segment [BC], J le milieu du segment [AB] et L le milieu du segment [AC]

1°) Montrer que OBAC est un losange.

2°)a) Montrer qu'il existe un unique antidéplacement f tel que f(A) = C et f(B) = A.

a)Montrer que f est une symétrie glissante dont on précisera l'axe et le vecteur.

b)Montrer que $f = R_{\left(O,-\frac{\pi}{3}\right)} o S_{(AB)}$.

b)Déterminer alors la nature et les éléments caractéristiques de $R_{\left(O,\frac{\pi}{3}\right)} o t_{\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}}$

3°) Soit l'isométrie $\varphi = S_{(BC)} o S_{(AC)} o S_{(AB)}$.

a)Montrer que $S_{(AC)} o S_{(AB)} = S_{(AO)} o S_{(AC)}$.

En déduire que $\varphi = S_{(IK)} o S_{(IJ)} o S_{(AC)}$ où K est le projeté orthogonal de I sur (AC).

b)Montrer alors que φ est une symétrie glissante dont précisera l'axe et le vecteur.

4°) Soit g une isométrie du plan qui laisse globalement invariant le triangle ABC.

a)Montrer que g fixe le point O.

b)Montrer que g([BC]) = [BC].

c)Déterminer toutes les isométries qui laissent globalement invariant le triangle ABC.

Exercice 16 :

Le plan complexe P est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O;\vec{u};\vec{v}\right)$. Soit A(i) et B(i+1). On considère l'application

f:P\{A}$\to$P :M(z) $\to$M'(z') tel que z'- i = $\frac{2}{\bar{z}+i}$.

1)Montrer que les points A, M et M' sont alignés.

2)Déterminer l'ensemble ζ des points invariants par f_0

3)Dans cette question, on suppose que z=1+i+$e^{i\theta}$

a)Déterminer et construire l'ensemble Γ décrit par le point M d'affixe z lorsque θ décrit $]\frac{-\pi}{2}, \frac{-\pi}{2}[$

b)Montrer que z'- i=1+i tan$\left(\frac{\theta}{2}\right)$.

c)En déduire l'ensemble Γ' image de Γ par f.

Le construire.

Exercice 17 : (5 points)

Soit F la fonction définie sur [0, +∞[par :

F(x)=$\int_x^{2x} \frac{1-e^t}{t^2}dt$ si x > 0 et F(0) = -ln2

1°)a) Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que pour tout réel x > 0,

F(x)= $\frac{e^{2x}-1}{2x} - \frac{e^x-1}{x} - \int_x^{2x}\frac{e^t}{t}dt$.

b) Montrer que pour tout réel x > 0,

$e^x ln2 \le \int_x^{2x}\frac{e^t}{t}dt \le e^{2x}ln2$

c) Calculer $\lim_{x\to 0+}\int_x^{2x}\frac{e^t}{t}dt$.

En déduire que F est continue à droite en 0.

2°)a) Montrer que pour tout réel x > 0,F(x)≤ $\frac{-e^x+1}{2x}$

b) En déduire $\lim_{x\to+\infty} F(x)$ et $\lim_{x\to+\infty}\frac{F(x)}{x}$

3°) Montrer que F est dérivable sur]0, +∞[

et pour tout réel x > 0, F'(x) = $\frac{-1}{2}(\frac{e^x-1}{x})^2$

4°) Soit x un réel strictement positif.

a) Montrer qu'il existe un réel c de]0 , x[tel que F(x) - F(0) = $xF'(c)$

b) En déduire que F est dérivable à droite en 0.

c) Dresser le tableau de variation de F et tracer sa courbe représentative.

Exercice 18 (4 points)

Le plan P est rapporté à un repère orthonormé direct . On désigne par f l'application u plan dans lui-même

qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z'=($\frac{1+i}{2}$) z + 1 - i

1°)a) Montrer que f est une similitude directe centre I que l'on précisera

b) Soit n un entier naturel non nul. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de

l'application g_n = fofo...of (n fois)
2°) On définit la suite des points (A_n) par :
A_0 le point d'affixe 2 + i et pour tout entier naturel n, .
On désigne par $A_{n+1} = f(A_n)$.
a) Mque pour tout entier n > 0, $A_n = g_n(A_0)$.
b) En déduire que pour tout entier naturel n,
$a_n = 2 + (\frac{\sqrt{2}}{2})^n e^{\frac{i(n+2)\pi}{4}}$
c) Montrer que pour tout entier naturel n, les points I, A_n et A_{n+4} sont alignés.

Exercice 19:

I/ On considère la fonction f définie sur] 0 , +∞ [par $f(x) = \frac{\ln x}{x\sqrt{x}}$
et on désigne par ζ_f sa représentation graphique dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) a) Dresser le tableau de variation de f .
b) Tracer ζ_f .

2) Calculer l'aire de la région du plan limité par la courbe ζ_f , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = \frac{1}{e}$; x = 1 .

II/ On pose pour tout n∈ IN* ,

$$I_n = \frac{1}{2^{n+1}\, n!}\int_{\frac{1}{e}}^{1}\frac{(\ln x)^n}{x\sqrt{x}}dx$$

1) a) Calculer I_1.
b) Montrer que pour tout n ∈ IN* , $|I_n| \leq \frac{1}{n!\,2^n}$.
c) Calculer la limite de I_n .

2) En intégrant par partie, montrer que pour tout n de IN* on a $I_{n+1} = I_n + \frac{(-1)^{n+1}\sqrt{e}}{(n+1)!2^{n+1}}$

3) a) Montrer que pour tout n de IN*,
$I_n = -1 + \sqrt{e}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!2^k}$
b) En déduire la limite de la somme :
$S_n = 1 - \frac{1}{1!2} + \frac{1}{1!2^2} - \cdots + (-1)^n\frac{1}{n!2^n}$

Exercice 20 :(3 points)

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$).
On considère la conique E de foyer O, de sommet S(-1,0) et de directrice associée au foyer O la droite D : $x = \frac{-5}{2}$.

1) a) M que l'excentricité e de E est égale à $\frac{2}{3}$.
b) En déduire que E est une ellipse d'équation : $\frac{(x-2)^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$.
c) Construire l'ellipse E .

2) Soit M un point de E d'affixe $z = re^{i\theta}$ où $\theta \in [0,\pi]$ et $r > 0$.
a) Montrer que $r = \frac{5}{3-2\cos\theta}$.
b) La droite (OM) recoupe l'ellipse E en M'.
Exprimer $(\vec{i}\,;\,\overrightarrow{OM'})$ en fonction de θ .
c) En déduire que $\frac{1}{OM} + \frac{1}{OM'} = \frac{6}{5}$.

3) a) Montrer que : $MM' = \frac{30}{5+4\sin^2\theta}$.
b) En déduire que MM' est minimale si et seulement si O est le milieu de [MM'].

Exercice : 21 (6 pts)

1. Soit ($\mathcal{E}$) l'ensemble des fonctions dérivables et strictement négatives sur les intervalles de la forme $]a,+\infty[$, (a ∈ IR) et vérifiant la relation :
$y + y^3 = -2y'$
a)On pose $z = \frac{1}{y^2}$. Montrer que $y \in (\mathcal{E})$ si et seulement si z est solution de l'équation différentielle (E) : z '- z= 1
b)Résoudre l'équation (E) puis vérifier que la fonction définie sur $]-\ln 2,+\infty[$ par $f(x) = \frac{-1}{\sqrt{2e^{x}-1}}$ est un élément de ($\mathcal{E}$)

2 . Soit g la fonction définie sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ par
g(x) = - ln (1+ sin x)
a)Dresser le tableau de variations de g
b)Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur $]-\ln 2,+\infty[$
c)Montrer que g^{-1} est dérivable sur $]-\ln 2,+\infty[$ et que $(g^{-1})'(x) = f(x)$

3. Pour n∈ IN^* et x ≥ 0 , on pose
$F_n(x) = \int_0^x (f(t))^{2n}\,dt$
a)Donner le sens de variations de F_n
b)Calculer $F_1(x)$ et montrer que $\lim_{x\to+\infty} F_1(x) = \ln 2$
c)Mque pour tout réel t ≥ 0 ; $-e^{\frac{-t}{2}} \leq f(t) \leq 0$
d)En déduire que $F_n(x) \leq \frac{1}{n}$ et que $\lim_{x\to+\infty} F_n(x)$ est finie.

4. On pose $U_n = \lim_{x\to+\infty} F_n(x)$.
<u>On se propose dans la suite de déterminer</u> U_n.
a)Mque $F_{n+1}(x) + F_n(x) = -\frac{1}{n}\,[(f(x))^{2n} - 1]$
b) En déduire que $U_{n+1} + U_n = \frac{1}{n}$

5. On pose $W_n = (-1)^n U_n$; n ∈ IN^*.
Vérifier que : $W_{n+1} - W_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$
En déduire que pour n ≥ 2 ;
$U_n = (-1)^n\left[-\ln 2 + \sum_{k=1}^{n-1}\frac{(-1)^{k+1}}{k}\right]$.