EXERCICE 1:

Dans le plan orienté, on considère un rectangle ABCD de centre O tel que :

$(\widehat{AB,AD}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$ et $(\widehat{BD,BA}) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$

La médiatrice de $[AD]$ coupe le cercle ζ circonscrit au rectangle ABCD en I et J

tel que : $(\widehat{IA,ID}) \equiv (\widehat{BA,BD})\ [2\pi]$

1. a. Montrer qu'il existe un unique déplacement R tel que R (A) = D et R (B) = O

   b. Donner les éléments caractéristiques de R.

2. On note R(D) =D'

a.Quelle est la nature du triangle ODD'.

b.Montrer que C est le milieu de $[OD']$

3. Soit R' la rotation de centre C et d'angle $\frac{2\pi}{3}$ et on pose f=R'oR.

Calculer f(A) et f(I) et caractériser f.

4. On pose g=$S_{OI}$of

a.Donner la nature de g.

b.Déterminer l'image du triangle AOJ et en déduire la forme réduite de g

EXERCICE 2 :

Soit la fonction f définie sur $]-1,+\infty[$ par: $f(x)=\frac{2}{(x+2)\sqrt{x+1}}$

On désigne par Cf la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un même repère orthonormé $(o,\vec{i},\vec{j})$.

1/Dresser le tableau de variation de f.

2/Construire Cf

3/Soit la fonction F définie sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ par : $F(\theta)=\int_0^{\tan^2(\theta)-1} f(x)dx$.

a .Montrer que F est dérivable sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ et déterminer sa fonction dérivée

b. Montrer que pour tout réel θ de $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ $F(\theta)= 4\theta-\pi$

4/ En déduire la valeur de $A=\int_0^2 f(x)dx$ Que représente la valeur trouvée.

5/ Soit $x \in [0,2]$ et soit $k \in \{0,1,2,....,n-1\}$ avec $n \in N^*$

a. Montrer que Si $\frac{2k}{n} \le x \le \frac{2k+2}{n}$ alors $f(\frac{2k+2}{n}) \le f(x) \le f(\frac{2k}{n})$

b. En déduire que $\frac{2}{n}f(\frac{2k+2}{n}) \leq \int_{\frac{2k}{n}}^{\frac{2k+2}{n}} f(x)dx \leq \frac{2}{n}f(\frac{2k}{n})$

c. Montrer que pour tout n de N*: $0 \leq \frac{2}{n}\sum_{0}^{n-1} f(\frac{2k}{n}) - \int_0^2 f(x)dx \leq \frac{2}{n}$

d. En déduire que $\lim_{+\infty} \frac{2}{n}\sum_{0}^{n-1} f(\frac{2k}{n}) = \frac{\pi}{3}$

EXERCICE 3 :

On étudie dans cet exercice la suite (S_n) définie pour $n \geq 1$ par :

$$S_n = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \ldots + \frac{1}{n^2} \quad \text{c'est à dire} \quad S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$$

A cet effet, on introduit pour tout réel t tel que $0 \leq t \leq \pi/2$:

$$I_k = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2k}(t)\, dt \quad ; \quad J_k = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 \cos^{2k}(t)\, dt$$

1.convergence de la suite (J_k/I_k).

a. Etablir l'inégalité suivante pour tout nombre réel t tel que $0 \leq t \leq \pi/2$:

$t \leq \frac{\pi}{2}\sin(t)$.

b.Etablir l'inégalité suivante pour tout nombre entier k tel que $k \geq 0$:

$0 \leq J_k \leq \frac{\pi^2}{4}(I_k - I_{k+1})$.

c.Exprimer I_{k+1} en fonction de I_k en intégrant par parties I_{k+1}
(on pourra poser $u'(t) = \cos(t)$ et $v(t) = \cos^{2k+1}(t)$ dans l'intégration par parties).

d.Déduire des résultats précédents que J_k/I_k tend vers 0 quand k tend vers $+\infty$.

2.Convergence et limite de la suite (S_n).

a.Exprimer I_k en fonction de J_k et J_{k-1}, en intégrant deux fois par parties l'intégrale I_k $(k \geq 1)$.

b. En déduire la relation suivante pour $k \geq 1$:

$$\frac{J_{k-1}}{I_{k-1}} - \frac{J_k}{I_k} = \frac{1}{2k^2}$$

c. Calculer J_0 et I_0, puis déterminer la limite S de la suite (S_n).

d. Etablir l'inégalité suivante pour tout nombre entier $k \geq 2$:

$\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$.

En déduire un encadrement de $S_{n+p} - S_n$ pour $n \geq 1$ et $p \geq 1$, puis de $S - S_n$,
et montrer que $0 \leq S_n - S + \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n^2}$.

Autrement dit, $S_n + \frac{1}{n}$ constitue une valeur approchée de S à $\frac{1}{n^2}$ près.

3Facultatif

Ecrire un programme en PYTHON calculant et affichant une valeur approchée du nombre S à 10^{-6} près.