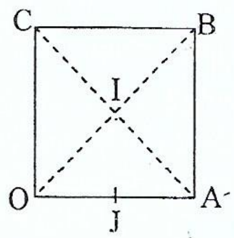
**Exercice 1 : (Vrai – Faux)**

Pour chacune des questions suivantes répondre par « Vrai » ou « Faux en justifiant la réponse dans la figure ci-contre OABC est un carré de centre I et de sens direct et J le milieu de [OA]




1) L'isométrie $t_{\overrightarrow{CA}} \circ S_{(IC)} \circ S_{(AB)}$ est une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$

2) $S_{(AB)} \circ t_{\overrightarrow{CA}} = S_{(IJ)} \circ t_{\overrightarrow{BA}}$

3) $r_{(B,\frac{-\pi}{2})} \circ r_{(I,\frac{\pi}{2})}$ est la translation de vecteur $\overrightarrow{BA}$

4) Soit S la similitude directe de centre O tel que S(B) = A. Alors J est l'antécédent de I par S

**Exercice 2 :**

On donne dans le plan complexe rapporté au repère orthonormé $(o,\vec{i},\vec{j})$ les points F , B et C d'affixe respectives 1 , $i\sqrt{3}$ et $1+\frac{3}{2}i$ . Soit (E) l'ensemble des points $M_{(z)}$ tel que $14|z|^2 - z^2 - \bar{z}^2 = 48$.

1) a) Donner une équation cartésienne de (E). En déduire que (E) est une ellipse et vérifier que F est un foy de (E).
   b) Vérifier que C appartient à (E) puis écrire une équation cartésienne de la tangente T à (E) en C .
   c) Déterminer les sommets de (E) puis tracer T et (E).

2) Soit $\Gamma = \{M(x,y) \in E$ tel que $x \in [-2,2]$ et $y \geq 0\}$ . Calculer le volume du solide engendré par rotation d $\Gamma$ autour de l'axe $(o,\vec{i})$ .

3) Soit D la directrice associé à F et H le projeté orthogonal de B sur D. Montrer que le triangle FHB e rectangle.

4) Soient M et N deux points de (E) tel que (OM) ⊥ (ON). On suppose que $(\widehat{\overrightarrow{OF},\overrightarrow{OM}}) \equiv \theta(2\pi)$ où $\theta \in [0,2\pi[$
   a) Montrer que $OM^2 = \dfrac{12}{3+sin^2\theta}$.
   b) En déduire que : $\dfrac{1}{OM^2} + \dfrac{1}{ON^2} = \dfrac{7}{12}$.

**Exercice 3 :**

Le plan complexe P est rapporté au repère orthonormé $(O,\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ})$, soit a un nombre complexe non nul.

On considère l'application $f$ de P\{I} dans P qui à tout point $M_{(z)}$ associe le point $M'_{(z')}$ tel q

$$z' = \frac{z-1-a^2}{z-1}.$$

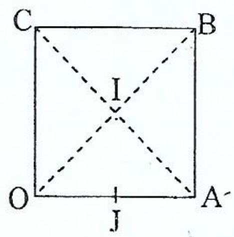
1) a) Montrer que les affixes des points invariants par $f$ sont les solutions de l'équation :
   (E) : $z^2 - 2z + 1 + a^2 = 0$
   b) Résoudre dans ℂ l'équation (E).

2) On considère les points A et B d'affixes respectives 1 + ia et 1 – ia et on pose a = x + iy où x et y ∈ ℝ .
   a) Montrer que les points O, A et B sont alignés si et seulement si x = 0 .
   b) Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ sont orthogonaux si et seulement si |a | = 1.

3) On suppose que $a = e^{i\theta}$ tel que $\theta \in ]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$.
   a) Donner l'écriture expo ... 1 – ia.
   b) En déduire a ... isocèle rectangle en O

4) On prend ici $a = i$ ... ectrice de l'angle $(\overrightarrow{IM},\overrightarrow{IM}$

**Exercice 1 : (Vrai – Faux)**




Pour chacune des questions suivantes répondre par « Vrai » ou « Faux
en justifiant la réponse dans la figure ci-contre OABC est un carré de centre I et de sens direct et J le milieu de [OA]

1) L'isométrie $t_{\overrightarrow{CA}} \circ S_{(IC)} \circ S_{(AB)}$ est une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$

2) $S_{(AB)} \circ t_{\overrightarrow{CA}} = S_{(IJ)} \circ t_{\overrightarrow{BA}}$

3) $r_{(B,\frac{-\pi}{2})} \circ r_{(I,\frac{\pi}{2})}$ est la translation de vecteur $\overrightarrow{BA}$

4) Soit S la similitude directe de centre O tel que S(B) = A. Alors J est l'antécédent de I par S

**Exercice 2 :**

On donne dans le plan complexe rapporté au repère orthonormé $(o,\vec{i},\vec{j})$ les points F , B et C d'affixe respectives 1 , $i\sqrt{3}$ et $1+\frac{3}{2}i$ . Soit (E) l'ensemble des points $M_{(z)}$ tel que $14|z|^2 - z^2 - \bar{z}^2 = 48$ .

1) **a)** Donner une équation cartésienne de (E). En déduire que (E) est une ellipse et vérifier que F est un foy de (E).
   **b)** Vérifier que C appartient à (E) puis écrire une équation cartésienne de la tangente T à (E) en C .
   **c)** Déterminer les sommets de (E) puis tracer T et (E).

2) Soit $\Gamma = \{M(x,y) \in E$ tel que $x \in [-2,2]$ et $y \geq 0\}$ . Calculer le volume du solide engendré par rotation d $\Gamma$ autour de l'axe $(o,\vec{i})$ .

3) Soit D la directrice associé à F et H le projeté orthogonal de B sur D. Montrer que le triangle FHB e rectangle.

4) Soient M et N deux points de (E) tel que (OM) ⊥ (ON). On suppose que $(\widehat{\overrightarrow{OF},\overrightarrow{OM}}) \equiv \theta(2\pi)$ où $\theta \in [0,2\pi[$

   **a)** Montrer que $OM^2 = \frac{12}{3+\sin^2\theta}$.

   **b)** En déduire que : $\frac{1}{OM^2} + \frac{1}{ON^2} = \frac{7}{12}$.

**Exercice 3 :**

Le plan complexe P est rapporté au repère orthonormé $(O,\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ})$, soit a un nombre complexe non nul.
On considère l'application $f$ de P\{I} dans P qui à tout point $M_{(z)}$ associe le point $M'_{(z')}$ tel q

$$z' = \frac{z-1-a^2}{z-1} .$$

1) **a)** Montrer que les affixes des points invariants par $f$ sont les solutions de l'équation :
   (E) : $z^2 - 2z + 1 + a^2 = 0$
   **b)** Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E).

2) On considère les points A et B d'affixes respectives 1 + ia et 1 – ia et on pose a = x + iy où x et y ∈ ℝ .
   **a)** Montrer que les points O, A et B sont alignés si et seulement si x = 0 .
   **b)** Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ sont orthogonaux si et seulement si |a | = 1.

3) On suppose que $a = e^{i\theta}$ tel que $\theta \in ]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ .
   **a)** Donner l'écriture expo ... 1 – ia.
   **b)** En déduire a ... e isocèle rectangle en O

4) On prend ici $a = i$ ... ectrice de l'angle $(\overrightarrow{IM},\overrightarrow{IM}$

# Sujet de Révision 1

## Ex 1)

1) On a $S_{(IC)} \circ S_{(AB)} = S_{(IA)} \circ S_{(AB)}$

$= R_{(A,\, 2(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AI}))}$

$= R_{(A,\, \frac{\pi}{2})}$

$t_{\overrightarrow{CA}} \circ (S_{(IC)} \circ S_{(AB)})$ est la composée de deux déplacements d'angles $0$ et $\frac{\pi}{2}$.

donc $t_{\overrightarrow{CA}} \circ (S_{(IC)} \circ S_{(AC)})$ est un déplacement d'angle $\alpha \equiv \frac{\pi}{2} + 0\ [2\pi]$

$\equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$.

D'où c'est une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$.

Vrai

2) $S_{(AB)} \circ t_{\overrightarrow{CA}} = S_{(AB)} \circ t_{\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BA}}$

$= S_{(AB)} \circ t_{\overrightarrow{CB}} \circ t_{\overrightarrow{BA}}$

$= S_{(AB)} \circ S_{(AB)} \circ S_{(IC)} \circ t_{\overrightarrow{BA}}$

$= S_{(IC)} \circ t_{\overrightarrow{BA}}$

Vrai

3) $r_{(B,-\frac{\pi}{2})} \circ r_{(I,\frac{\pi}{2})}(B)$

$= r_{(B,-\frac{\pi}{2})}(C) \neq A$.

Car $(\widehat{\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}}) \equiv +\frac{\pi}{2}\ [2\pi]$

or $t_{\overrightarrow{BA}}(B) = A$.

D'où $r_{(B,-\frac{\pi}{2})} \circ r_{(I,\frac{\pi}{2})}(B) \neq t_{\overrightarrow{BA}}(B)$.

donc $r_{(B,-\frac{\pi}{2})} \circ r_{(I,\frac{\pi}{2})} \neq t_{\overrightarrow{BA}}$

Faux.

4) On a $(\widehat{\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OA}}) \equiv \frac{-\pi}{4}\ [2\pi]$. donc $\frac{-\pi}{4}$ est ... de S

$S(J) = I$ donc $(\widehat{\overrightarrow{OJ},\overrightarrow{OI}}) \equiv \frac{-\pi}{4}\ [2\pi]$

or $(\widehat{\overrightarrow{OJ},\overrightarrow{OI}}) \equiv \frac{\pi}{4}\ [2\pi]$.

absurde.

D'où $J$ n'est pas l'antécédent de $I$ par ...

Faux.

## Ex 4):

1) a/ On a $2009 = 125 \times 16 + 9$.

donc $2009 \equiv 9 \pmod{16}$

" $2009^2 \equiv 81 \pmod{16}$

$\equiv 1 \pmod{16}$

$1 \in \{0, 1, 2, \dots, 15\}$.

Donc $1$ est le reste de la division Euclidienne de $2009^2$ par 16.

b/ On a $2009^2 \equiv 1 \pmod{16}$

donc $(2009^2)^{4000} \equiv 1 \pmod{16}$

$2009^{8000} \times 2009 \equiv 2009 \pmod{16}$

$2009^{8001} \equiv 9 \pmod{16}$.

2) pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{cases} U_0 = 2009^2 - 1 \\ U_{n+1} = (U_n + 1)^5 - 1. \end{cases}$$

a/ On a ~~$2009^2 \equiv 1 \pmod{16}$~~

~~donc $2009^2 - 1 \equiv 0 \pmod{16}$~~

~~" $U_0 \equiv 0 \pmod{16}$~~

~~donc $16 \mid U_0$.~~

On a $2009 \equiv -1 \pmod 5$

donc $2009^2 \equiv 1 \pmod 5$

" $2009^2 - 1 \equiv 0 \pmod 5$

" $U_0 \equiv 0 \pmod 5$

donc $5 \mid U_0$.

b/ pour $n \in \mathbb{N}$,

On a :

$U_{n+1} = (U_n+1)^5 - 1$

$= -1 + \sum_{k=0}^{5} C_5^k U_n^k \cdot 1^{n-k}$

$= -1 + C_5^0 \times 1 + C_5^1 \cdot U_n + C_5^2 \cdot U_n^2 + C_5^3 U_n^3 + C_5^4 U_n^4 + C_5^5 U_n^5$

$= \cancel{-1+1} + 5U_n + 10U_n^2 + 10U_n^3 + 5U_n^4 + U_n^5$

$= U_n(U_n^4 + 5(1 + U_n^3 + 2U_n^2 + 2U_n^3))$.

c/ pour $n=0$,

$U_0$ est divisible par $5^{0+1} = 5$.

pour $n \in \mathbb{N}$, Supposons que $5^{n+1} | U_n$.

Montrons que $5^{n+2} | U_n$.

On a $U_n = 5^{n+1} \times q$, $q \in \mathbb{Z}$.

donc $5 | U_n$

donc $5 | U_n^4$

et $5 | 5(U_n^3 + 2U_n^2 + 2U_n + 1)$

$5 | U_n^4 + 5(U_n^3 + 2U_n^2 + 2U_n + 1)$

donc $U_n^4 + 5(U_n^3 + 2U_n^2 + 2U_n + 1) = 5q'$ ; $q' \in \mathbb{Z}$.

donc $U_{n+1} = 5^{n+1} \times q \times 5 \times q'$

$= 5^{n+2} \cdot qq'$.

D'où $5^{n+2} | U_{n+1}$

Conclusion, par principe de Récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n$ est divisible par $5^{n+1}$.

3) a/ On a $U_0 = 2009^2 - 1$

$U_1 = (U_0+1)^5 - 1$

$U_1 = 2009^{10} - 1$

$U_2 = (U_1+1)^5 - 1$

$= 2009^{50} - 1$

$U_3 = (U_2+1)^5 - 1$

$= 2009^{250} - 1$

D'après 2/c) : $U_n$ est divisible par $5^{n+1}$

pour $n=3$, $U_3$ est divisible par $5^4 = 625$

donc $2009^{250} - 1 \equiv 0 \pmod{625}$

$2009^{250} \equiv 1 \pmod{625}$.

~~pour n=4, U_4 est divisible~~

Donc $((2009)^{250})^{32} \equiv 1 \pmod{625}$

" $2009^{8000} \times 2009 \equiv 1 \times 2009$ (mod 625)

" $2009^{8001} \equiv 2009 \pmod{625}$.

b/ On a $\begin{cases} 2009^{8001} \equiv 2009 \pmod{625} \\ 2009^{8001} \equiv 2009 \pmod{16} \end{cases}$

donc $\begin{cases} 2009^{8001} - 2009 \equiv 0 \pmod{625} \\ 2009^{8001} - 2009 \equiv 0 \pmod{16} \end{cases}$

Or $16 = 2^4$ et $625 = 5^4$

donc $16 \wedge 625 = 1$.

D'où $2009^{8001} - 2009 \equiv 0 \pmod{16 \times 625}$

~~$2009^{8001} \equiv 2009 \pmod{16 \times 625}$~~.

donc $10^4 | 2009^{8001} - 2009$.

4) Comme $7991 \equiv -2009 \pmod{10000}$

alors $(7991)^{8001} \equiv -2009^{8001}$ (mod 10000)

et $(7991)^{16002} \equiv (2009^{8001})^2$ (mod 10000)

$7991^{8001} + 7991^{16002} \equiv 2009^{8001}(2009^{8001} - 1)$ (mod $10^4$)

$\equiv 2009 \times 2008$ (mod $10^4$)

$\equiv 4034072 \pmod{10^4}$

$\equiv 4072 \pmod{10^4}$

~~Le reste de~~

Ex 5

$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto f(x) = x - \frac{1}{2} + e^{-x}$.

1) a/ $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

pour $x \in \mathbb{R}$,

$f'(x) = 1 - e^{-x}$

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $\frac{1}{2}$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

$\lim_{+\infty} f = \lim_{x \to -\infty} x - \frac{1}{2} + e^{-x}$

$= \lim_{x \to -\infty} x\left(1 - \frac{1}{2x} + \frac{1}{x.e^{x}}\right)$

$= +\infty$.

Car $\lim_{x \to -\infty} x = -\infty$

$\lim_{x \to -\infty} x.e^{x} = 0^{-}$

donc $\lim_{x \to -\infty} 1 - \frac{1}{2x} + \frac{1}{x.e^{x}} = -\infty$

Etudions la position relative de $C_f$ et $C_g$.

b/ pour $x \in \mathbb{R}$,

$f(x) - g(x) = \cancel{x} - \cancel{\frac{1}{2}} + e^{-x} - \cancel{x} + \cancel{\frac{1}{2}} - e^{x}$

$= e^{-x}(1 - e^{2x})$

$f(x) - g(x) > 0$ ssi

$1 - e^{2x} > 0$

ssi $1 > e^{2x}$

ssi $2x < 0$.

ssi $x < 0$

Sur $]-\infty, 0]$, $C$ est au dessus de $\Gamma$.

Sur $[0, +\infty[$, $\Gamma$ " " " $C$.

2) $k \in ]1, +\infty[$.

$D_k : y = x - \frac{1}{2} + \frac{1}{k}$.

a/ On pose $\{M_k\} = C \cap D_k$ et $\{N_k\} = \Gamma \cap D_k$.

* On a $f(x) = x - \frac{1}{2} + \frac{1}{k}$

ssi $e^{-x} = \frac{1}{k}$

ssi $x = \ln(k)$ ; $y = \ln k - \frac{1}{2} + \frac{1}{k}$.

donc $M_k\left(\ln k ; \ln k - \frac{1}{2} + \frac{1}{k}\right)$.

* On a : $g(x) = x - \frac{1}{2} + \frac{1}{k}$

ssi $e^{x} = \frac{1}{k}$.

$x = -\ln k$ ; $y = -\ln k - \frac{1}{2} +$

donc $N_k\left(-\ln k ; -\ln k - \frac{1}{2} + \frac{1}{k}\right)$.

On pose $P_k = N_k * M_k$.

$x_{P_k} = \frac{x_{N_k} + x_{M_k}}{2}$

$= \frac{\ln k - \ln k}{2}$

$= 0$

donc $P_k \in (O, \vec{j})$.

Appartient à 1) b/.

$\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} 1 - \frac{1}{2x} + \frac{1}{x.e^{x}}$

$= -\infty$.

D'où $C$ admet une branche parabolique de direction $(O, \vec{j})$ au voisinage de

$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} 1 - \frac{1}{2x} + \frac{1}{x.e^{x}}$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) - x = \lim_{x \to +\infty} -\frac{1}{2} + e^{-x}$

$= -\frac{1}{2}$.

You could do this directly

$\lim_{x \to +\infty} f(x) - \left(x - \frac{1}{2}\right) = \lim_{x \to +\infty} e^{-x}$

$= 0$.

D'où $\Delta : y = x - \frac{1}{2}$ une asymptote oblique à $C$ au voisinage de $(+\infty)$.

2) b/ Soit $a_1$ l'aire de la partie du plan limitée par $C$, $D_k$ et $(O, \vec{j})$

$a_1 = \int_0^{\ln k} \left(f(x) - \left(x - \frac{1}{2} + \frac{1}{k}\right)\right) dx$

$= \int_0^{\ln k} \left(e^{-x} - \frac{1}{k}\right) dx$

$= \left[-e^{-x} - \frac{1}{k} \cdot x\right]_0^{\ln k}$

$a_1 = 1 - \frac{1}{k} - \frac{1}{k}\ln k \ (u.a)$

Soit $a_2$ l'aire de la partie du plan limitée par $\mathscr{C}'$, $D_k$ et $(O,\vec{j})$.

$$a_2 = \int_{-\ln k}^{0} \left(g(x) - \left(x - \frac{1}{2} + \frac{1}{k}\right)\right)dx$$

$$= \int_{-\ln k}^{0} \left(e^{x} - \frac{1}{k}\right) dx$$

$$= \left[ e^{x} - \frac{1}{k} x \right]_{-\ln k}^{0}$$

$$= 1 - e^{-\ln k} - \frac{\ln k}{k}$$

$$= 1 - \frac{1}{k} - \frac{\ln k}{k} \quad (u.a)$$

$$= a_1.$$

D'où $a_1 = a_2 = \mathcal{A}(k)$.

$$\lim_{k \to +\infty} \mathcal{A}(k) = \lim_{k \to +\infty} 1 - \frac{1}{k} - \frac{\ln k}{k}$$

$$= 1 \ . \ u a$$

c/ On pose $H$ le projeté orthogonal de $M_k$ sur $(O, \vec{j})$.

$$S(k) = \frac{AP_k \times M_k H}{2} \quad ; \quad k > 1 \ ; \ \ln k > 0$$

$$= \frac{\left|\frac{1}{k} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right| \times \ln k}{2}$$

$$= \left|\frac{1}{k} - 1\right| \times \frac{\ln k}{2}. \quad \text{or } k > 1,\ \frac{1}{k} - 1 < 0$$

$$= \left(1 - \frac{1}{k}\right) \cdot \frac{\ln k}{2}.$$

Ex 5

3) : $\varphi : ]1,+\infty[ \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto \varphi(x) = \ln x - 4\,\frac{x-1}{x+3}$

a/ $\varphi$ est dérivable sur $]1,+\infty[$.

pour $x > 1$,

$$\varphi'(x) = \frac{1}{x} - 4\cdot\frac{x+3-(x-1)}{(x+3)^2}$$

$$= \frac{1}{x} - \frac{16}{(x+3)^2}$$

$$= \frac{(x+3)^2 - 16x}{x(x+3)^2}$$

$$= \frac{x^2-10x+9}{x(x+3)^2} = \frac{(x-1)(x-9)}{x(x+3)^2}$$

$$\cancel{= \frac{(x-2+2\sqrt{2})(x-2-2\sqrt{2})}{x(x+1)}}$$

| $x$ | $1$ | | $9$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\varphi'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $\varphi(x)$ | $0$ | $\searrow$ | $2\ln 3 - \frac{8}{3} < 0$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

b/ On a $S(k) = 2\,\mathcal{A}(k)$

ssi $\frac{\ln k}{2}\left(1-\frac{1}{k}\right) = 2\left(1-\frac{1}{k}-\frac{\ln k}{k}\right)$

ssi $\ln k\left(1-\frac{1}{k}\right) = 4\left(1-\frac{1}{k}\right) - 4\cdot\frac{\ln k}{k}$

ssi $\ln k - \frac{\ln k}{k} + 4\frac{\ln k}{k} = 4\left(\frac{k-1}{k}\right)$

ssi $\ln k\left(1-\frac{3}{k}\right) = 4\left(\frac{k-1}{k}\right)$

ssi $\ln k\left(\frac{k-3}{k}\right) = 4\left(\frac{k-1}{k}\right)$

ssi $\ln k = 4\left(\frac{k-1}{k-3}\right)$

ssi $\ln k - 4\left(\frac{k-1}{k-3}\right) = 0$

ssi $\varphi(k) = 0$

~~Sur ]1, 9]~~, $\varphi(]1,9]) = [2\ln 3 - \frac{8}{3}, 0[$

Comme $0 \in [2\ln 3 - \frac{8}{3}[$, $\varphi(k) = 0$

Sur

4) $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n(x) = e^{-x} - x^{2n+1}$ ; $x \in$

a/ $f_n$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, pour $n \in \mathbb{N}$

pour $x \in \mathbb{R}$,

$f_n'(x) = -e^{-x} - (2n+1)\cdot x^{2n}$.

Comme $-e^{-x} < 0$

$x^{2n} \geq 0$ (2n est pair)

$-(2n+1)x^{2n} \leq 0$

donc $f_n'(x) \leq 0$.

et $f_n'(x) = 0$ ssi $x = 0$.

D'où $f_n$ est strictement decroissante et continue sur $\mathbb{R}$.

Elle réalise une bijection de $]-\infty,+\infty[$ sur $f_n(]-\infty,+\infty[) = ]\lim\limits_{+\infty} f_n, \lim\limits_{-\infty}$

$= ]-\infty, +\infty[$

(Calcul direct de limites)

Comme $0 \in ]-\infty,+\infty[$, alors il existe un unique $U_n \in \mathbb{R}$ / $f_n(U_n) = 0$. (1)

On a $f_n(0) = 1 - 0 = 1 > 0$

$f_n(1) = \frac{1}{e} - 1 = -0{,}632 < 0$

$f_n$ continue sur $[0, 1]$

D'après le théorème des valeurs intermé
il existe au moins une solution $\alpha$ dans $]0,1[$

$f_n(\alpha) = 0$. (2)

(1) et (2) donnent $\begin{cases} U_n \in ]0,1[ \\ f_n(U_n) = 0. \end{cases}$

b/ On a $f_n(U_n) = e^{-U_n} - U_n^{2n+1} = 0$

donc $e^{-U_n} = U_n^{2n+1}$.

$f_{n+1}(U_n) = e^{-U_n} - U_n^{2n+3}$

$= U_n^{2n+1} - U_n^{2n+3}$

$= U_n^{2n+1} \times (1 - U_n^2)$

D'où $f_{n+1}(U_n) \geq 0$

$f_{n+1}(U_n) \geq f_{n+1}(U_{n+1})$

et $f_{n+1}$ strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

Donc $U_n \leq U_{n+1}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

D'où $(U_n)$ est croissante.

or $U_n$ est majorée par 1.

Donc $(U_n)$ est convergente vers une limite $0 \leq l \leq 1$

c/ pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$f_n(U_n) = 0$$

ssi $e^{-U_n} - U_n^{2n+1} = 0$

" $e^{-U_n} = U_n^{2n+1}$.

$$-U_n = \ln(U_n^{2n+1}).$$

$$-U_n = (2n+1)\ln(U_n).$$

$$\ln(U_n) = \frac{-U_n}{2n+1}.$$

c/ On a $\lim\limits_{n \to +\infty} \ln(U_n)$

$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{-U_n}{2n+1}$$

$$= 0$$

Car $\begin{cases} \lim\limits_{n \to +\infty} U_n = l \in [0, 1] \\ \lim\limits_{n \to +\infty} 2n+1 = +\infty \end{cases}$

~~Comme~~ $\cancel{\begin{cases} \lim\limits_{x \to 1} \ln(x) = 0 \\ \lim\limits_{n \to +\infty} \ln U_n = 0 \end{cases}}$

~~alors~~ $\cancel{\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = 1}$.

Or $\lim\limits_{n \to +\infty} \ln U_n = \ln l$.

d'où $\ln l = 0$

Ex 3|

$a \in \mathbb{C}^*$.

$f : P\setminus\{I\} \longrightarrow P$

$M(z) \longmapsto M'(z')$ /

$$z' = \frac{z-1-a^2}{z-1}.$$

$z^2-2z+1+a^2=0.$ Donc les points invariants par $f$ sont les solutions de l'équation :

1) a/ On pose $M(z)$ invariant par $f$.

donc $M = M'$

ssi $z = z'$

ssi $\frac{z-1-a^2}{z-1} = z$

ssi $z-1-a^2-z^2+z=0$.

ssi $\boxed{z^2-2z+1+a^2=0.}$

b/ On a $\Delta = 4-4(1+a^2)$

$= 4(1-1-a^2)$

$= -4a^2$

$= (2ia)^2$

Une racine carrée de $\Delta$ est $\delta = 2ia$.

$z_2 = \frac{2-2ia}{2}$ ; $z_1 = \frac{2+2ia}{2}$

$z_2 = 1-ia$ ; $z_1 = 1+ia$.

2) On pose $A(z_1)$ et $B(z_2)$

$a = x+iy$ ; $x, y \in \mathbb{R}^*$.

a/ On a $\frac{z_A - z_O}{z_B - z_O} = \frac{1+ia}{1-ia}$

$\det(\vec{OA}, \vec{OB}) = \begin{vmatrix} 1-y & 1+y \\ x & -x \end{vmatrix} = 0$

$= \frac{(1+ia)^2}{1+a^2}$

$= \frac{1+2ia-a^2}{1+a^2}$

$= \frac{1+2ix-2y-a^2}{1+a^2(x+iy)} \in \ldots$

Il faut que $\det = 0$

$O$, $A$ et $B$ sont alignés ssi $\frac{z_A - z_O}{z_B - z_O} \in \mathbb{R}$

ssi $1+2ix-2y-a^2 \in \mathbb{R}$

$x = 0$.

ssi $x = 0$.

b/ ~~$\vec{OA}$ et $\vec{OB}$ sont orthogonaux~~

~~ssi $\frac{z_A - z_O}{z_B - z_O} \in i\mathbb{R}$~~

$\frac{z_A}{z_B} \in i\mathbb{R}$.

~~ssi~~ On a $z_1 = 1+ia$

$= 1+ix-y$

$= (1-y)+i\times x$.

$z_2 = 1-ia$

$= 1-ix+y$

$= (1+y)+i\times(-x)$.

donc $\vec{OA}\begin{pmatrix} 1-y \\ x \end{pmatrix}$ et $\vec{OB}\begin{pmatrix} 1+y \\ -x \end{pmatrix}$

$\vec{OA} \perp \vec{OB}$ ssi $\vec{OA}\cdot\vec{OB} = 0$

ssi $(1-y)(1+y)+x\times(-x)=0$

ssi $1-y^2-x^2=0$.

ssi $|a|^2 = 1$ et $|a|>0$.

ssi $|a| = 1$.

3) $a = e^{i\theta}$ ; $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

a) $1+ia = 1+e^{i(\theta+\frac{\pi}{2})}$

$= e^{i(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4})}\left(e^{-i(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4})} + e^{i(\frac{\theta}{2}}\right.$

$= 2\cos\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\cdot e^{i(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4})}$

Comme $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

$\frac{\theta}{2} \in \left]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right[$

$\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4} \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$

$\cos\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right) > 0$.

D'où l'écriture exponentielle de $1+ia$ est : $2\cos\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\cdot e^{i(\frac{\theta}{2}+}$

~~De même~~ !!!

~~$1-ia = 2\cos\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\cdot e^{i(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4})}$~~

b/ $OAB$ est rectangle en $O$

~~ssi $\vec{OA} \perp \vec{OB}$~~

~~ssi $|a| = 1$.~~

$\ldots = 2\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$.

b/ On a $|a| = 1$

ssi OAB est rectangle en O

Il suffit juste que OAB soit isocèle en O.

$|z_A| = |z_B|$

ssi $2\cos\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = 2\sin\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$

~~ssi~~ $\cancel{\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4} \equiv \frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4} \ [2\pi]}$

~~ou~~

$\cancel{\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4} \equiv -\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4} \ [2\pi]}$

~~ssi~~ $\cancel{\frac{\pi}{2} \equiv 0 \ [2\pi]}$ ~~impossible~~

$\cancel{\theta \equiv 0 \ [2\pi]}$

~~or~~ $\cancel{\theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[}$.

~~donc~~ $\cancel{\theta = 0}$ ✓

$\cancel{a = e^{i0} = 1}$ ✓ car $\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4} \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$

Donc $\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4} = \frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}$

$\theta = 0.$

$a = e^{i0}.$

4) $a = i\sqrt{2}$.

$(\overrightarrow{IO}, \overrightarrow{IM'}) \equiv \arg\left(\frac{z_{M'} - 1}{-1}\right) [2\pi]$

$\equiv \arg(1 - z') \ [2\pi]$

$\equiv \arg\left(1 - \frac{z - 1 + 2}{z - 1}\right) [2\pi]$

$\equiv \arg\left(1 - \left(\frac{z + 1}{z - 1}\right)\right) [2\pi]$

$\equiv \arg\left(\frac{z - 1 - z - 1}{z - 1}\right) [2\pi]$

$\equiv \arg\left(\frac{2}{1 - z}\right) [2\pi]$

$\equiv \arg(2) - \arg(1 - z) \ [2\pi]$

$\equiv -\arg(z_I - z_M) \ [2\pi]$

$\equiv$ ...

D'où $[IO)$ bissectrice de $(\overrightarrow{IM}, \overrightarrow{IM'})$.

Ex 2

$F(1)$

$B(i\sqrt{3})$

$C(1+\frac{3}{2}i)$.

$(E)=\{M(z)\in P \,/\, 14|z|^2-z^2-\bar{z}^2=48\}$

1) a/ On pose $z=x+iy$, $(x,y)\in\mathbb{R}^2$.

$M(z)\in(E)$ ssi

$14\times(x^2+y^2)-(x+iy)^2-(x-iy)^2=48$

sig $14x^2+14y^2-x^2+y^2-2ixy-x^2+y^2+2ixy=48$

sig $12x^2+16y^2=48$

sig $3x^2+4y^2=12$

sig $\frac{x^2}{\frac{12}{3}}+\frac{y^2}{\frac{12}{4}}=1$

sig $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$

sig $\frac{x^2}{2^2}+\frac{y^2}{\sqrt{3}^2}=1$.

Donc (E) est une ellipse de foyer $\Omega$

avec ~~...~~

$z_\Omega=\sqrt{4-3}+i\times 0$

$=1$.

$=z_F$

donc (E) de foyer F.

b/ On a $C(z_C=1+\frac{3}{2}i)$.

Comme $\frac{1^2}{4}+\frac{(\frac{3}{2})^2}{3}=\frac{1}{4}+\frac{9}{4\times 3}$

$=1$.

alors $C\in(E)$

Soit la tangente à (E) en C $T$:

$T: \frac{x\times 1}{4}+\frac{y\times\frac{3}{2}}{3}=1$

$T: \frac{x}{4}+\frac{y}{2}=1$

$T: x+2y=4$.

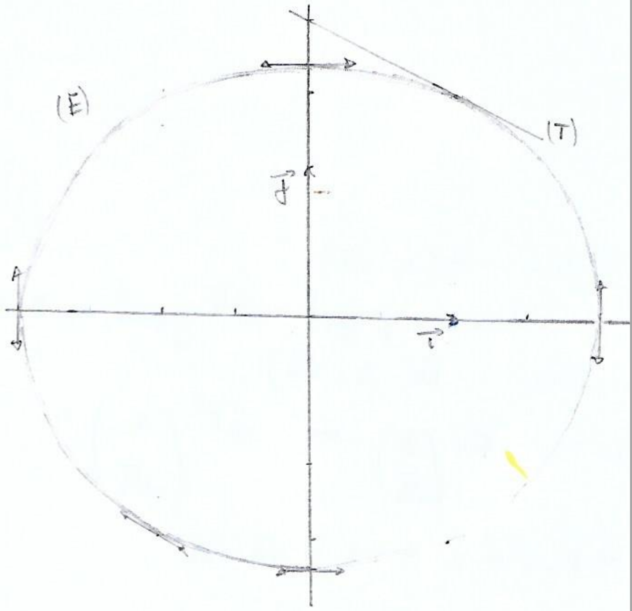
$T: y=\frac{4-x}{2}$.

$T: y=\frac{-1}{2}x+2$

c) Les sommets de (E) sont:

$S(2,0)$, $S'(-2,0)$

et $B(0,\sqrt{3})$, $B'(0,-\sqrt{3})$.




2) $(\Gamma)=\{M(x,y)\in E \,/\, x\in[-2,2], y\geq 0\}$

On pose $M(x,y)\in(\Gamma)$

alors $M(x,y)\in(E)$

" $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$.

" $3x^2+4y^2=12$

" $y^2=\frac{(-3x^2+12)}{4}$ or $y\geq 0$

" $y=\frac{\sqrt{12-3x^2}}{2}$.

On pose $f:[-2,2]\to\mathbb{R}$

$x\mapsto f(x)=\frac{\sqrt{12-3x^2}}{2}$

$V=\pi.\int_{-2}^{2}f^2(x)\,dx$

$=\frac{\pi}{4}.\int_{-2}^{2}(12-3x^2)\,dx$

$=\frac{\pi}{4}\left[12x-\frac{3x^3}{3}\right]_{-2}^{2}$

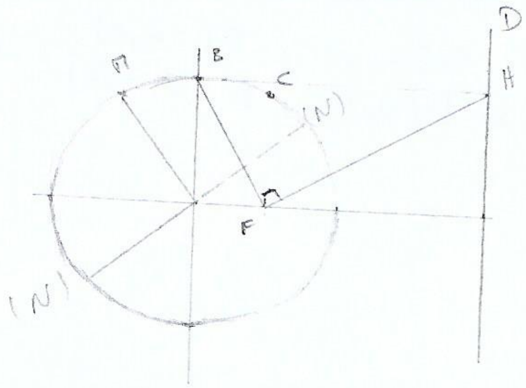
$\frac{\pi}{4}\times(24-8+24-8)$

u.v. $=8\pi$ u.v

3) D la directrice associée à F.

donc D : $x = \frac{2^2}{1}$

D : $x = 4$.




On a $B(0, \sqrt{3})$

et H son projeté orthogonal sur D : $x = 4$.

Donc $H(4, \sqrt{3})$.

D'où $\vec{FH}\begin{pmatrix}3\\ \sqrt{3}\end{pmatrix}$. or $\vec{BF}\begin{pmatrix}1\\ -\sqrt{3}\end{pmatrix}$.

$\vec{BF}\cdot\vec{FH} = 3\times 1 - \sqrt{3}\times\sqrt{3}$

$= 0$.

D'où $\vec{FB} \perp \vec{FH}$.

" FBH rectangle en F.

4) a/ On a $(\widehat{\vec{OF}, \vec{OM}}) \equiv \theta\,[2\pi]$

donc $(\widehat{\vec{u}, \vec{OM}}) \equiv \theta\,[2\pi]$

" $\arg(z_M) \equiv \theta\,[2\pi]$.

D'où $z_M = OM \times e^{i\theta}$ ; $\theta \in [0, 2\pi[$.

Comme $M \in (E)$ alors

$14 \times OM^2 - z_M^2 - \overline{z_M}^2 = 48$

$14 \cdot OM^2 - OM^2 \cdot e^{2i\theta} - OM^2 e^{-2i\theta} = 48$

$OM^2\left(14 - \left(e^{2i\theta} + e^{-2i\theta}\right)\right) = 48$

$OM^2\left(14 - 2\cos(2\theta)\right) = 48$

$OM^2\left(14 - 2(1 - 2\sin^2\theta)\right) = 48$

$OM^2\left(12 + 4\sin^2\theta\right) = 48$

$OM^2 = \frac{48}{12 + 4\sin^2\theta}$

$= \frac{12}{\ }$

b/ ~~On a arg~~

D'après 4) a/ , On a :

Si $M \in (E)$ et $\arg(z_M) \equiv \theta\,[2\pi$

alors $OM^2 = \frac{12}{3 + \sin^2\theta}$.

Comme $(ON) \perp (OM)$.

~~alors $\arg(z_N) \equiv \theta + \frac{\pi}{2}$~~

alors $\begin{cases} \arg(z_N) \equiv \theta + \frac{\pi}{2}\,[2\pi] \\ \text{ou } \arg(z_N) \equiv \theta - \frac{\pi}{2}\,[2\pi] \end{cases}$

D'où $\begin{cases} ON^2 = \dfrac{12}{3 + \sin^2\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)} \\ \text{ou } ON^2 = \dfrac{12}{3 + \sin^2\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)} \end{cases}$

alors $\begin{cases} ON^2 = \dfrac{12}{3 + \cos^2(\theta)} \\ \text{ou} \\ ON^2 = \dfrac{12}{3 + (-\cos(\theta))^2} \end{cases}$

alors $ON^2 = \frac{12}{3 + \cos^2\theta}$.

Par suite :

$\frac{1}{OM^2} + \frac{1}{ON^2} = \frac{3 + \sin^2\theta + 3 + \cos^2\theta}{12}$

$= \frac{7}{12}$.