$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$.

Lycée pilote de Bizerte	Test de controle n°1	Prof:M.Benali

Exercice –1– :

Le plan complexe est rapporté a un R.O.N.D $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$*.Soit A et B les points d'affixes respectives (-i) et (i).*

Soit f l'application du plan dans lui meme qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe $z' = \frac{z}{}$

1)*Déteminer l'ensemble des points invariants par f.*

2)*Montrer que les points A,M et M' sont alignés.*

3)a)*Montrer que pour tout nombre complexe* $z \in \mathbb{C}^* - \{-i\}$; $\arg(z') \equiv -\frac{\pi}{2} + \left(\widehat{\overrightarrow{MB},\overrightarrow{MO}}\right)[2\pi]$.

b)*En déduire que si M appartient au cercle* ζ *de diamètre* $[OB]$ *privé des points O et B alors M' apparti*
à un ensemble que l'on precisera.

c)*Construire le point M' image par f d'un point M de* $\zeta - \{O,\mathcal{B}\}$.

4)a)*Montrer que pour tout nombre complexe* $z \neq -i$ *, on a :* $|z'-z| = |z'+i|$ *si et seulement si* $M(z) \in C_{(O,1)}$.

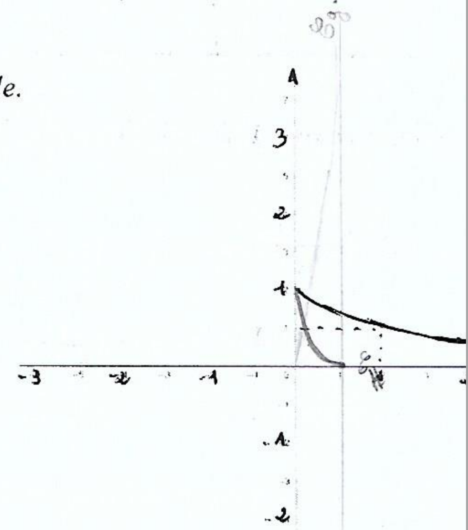
b)*Déduire que si* $M \in C$ *alors M' est le milieu de* $[AM]$.

5)*Soit* $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ *on pose* $z = e^{i\theta}$; *ecrire z' sous forme exponentielle.*

Exercice –2– :

Soit f une fonction définie sur IR .

on donne ci-contre la courbe de la restriction de f à IR_+.



1)*Déterminer* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, $f(IR_+)$ *et* $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(\cos^2 x)}{x}$.

2)*On suppose que pour tout* $x \prec 0$, $f(x) = 1 + \sqrt{x^2 - x}\ \sin(\frac{1}{x})$.

a)*Montrer que f est continue en 0 .*

b)*Calculer* $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, *interpreter graphiquement le resultat obtenu.*

3)*Soit g la fonction définie sur* $\left[0,\frac{1}{2}\right[$ *par* $g(x) = \tan(\pi x)$.

a)*Etudier les variations de g puis tracer* C_g *dans le meme repére.*

b)*Montrer que l'équation* $f(x) = g(x)$ *admet dans* $\left]0,\frac{1}{4}\right[$ *une unique solution* α.

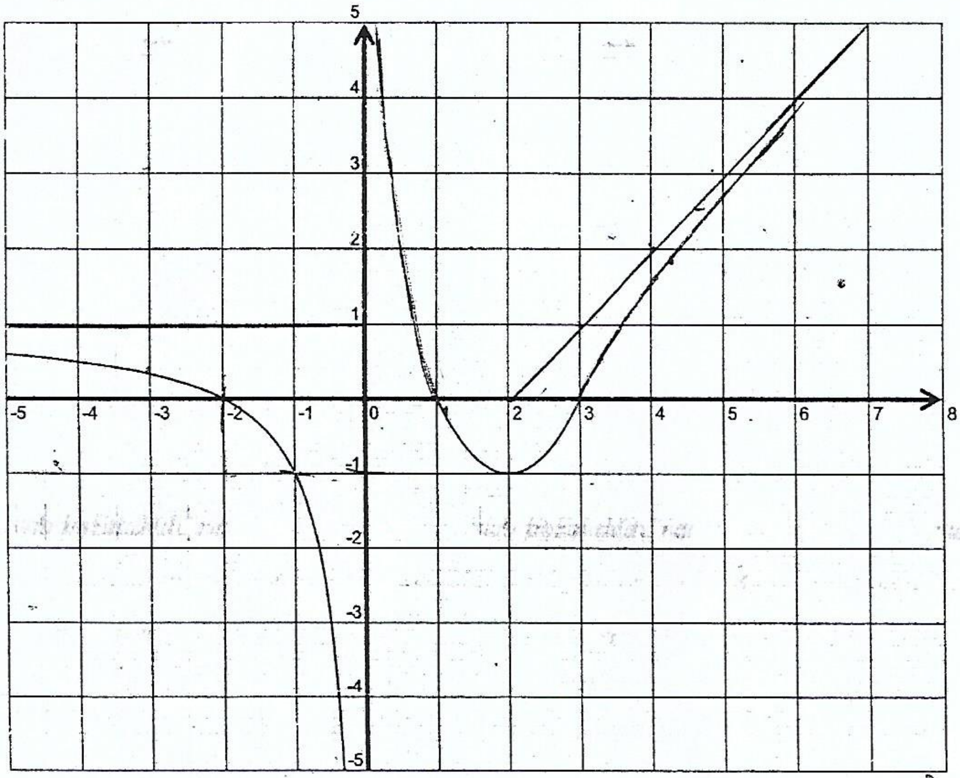
4)*Soit h la fonction définie sur* $\left[0,\frac{1}{2}\right[$ *par* $h(x) = f \circ g(x)$

a)*Montrer que h admet un prolongement par continuité H à gauche en* $\frac{1}{2}$.

b)*Etudier les variations de H puis donner l'allure de sa courbe dans le meme repére.*

EXERCICE 3

Dans la figure ci-dessous ζ *est la courbe représentative d'une fonction f définie et continue sur chacun des intervalles* $]-\infty,0[$ et $]0,+\infty[$. *Les droites :* $\Delta : y = x-2$, $D : x = 0$ et $D' : y = 1$ *sont des asymptotes à* ζ.



1)a- Déterminer graphiquement : $\lim\limits_{-\infty} f$, , $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$

b- En déduire : $\lim\limits_{x\to-\infty}\tan\left(\frac{\pi}{2}f(x)\right)$, $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\sin(f(x))}{f(x)}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x-f(x))$

2) a-Déterminer le domaine de définition de $f\circ f$

b- Déterminer $(f\circ f)(]-\infty,-2[)$

c- Résoudre graphiquement l'inéquation $(f\circ f)(x) < -1$

3) Soit la fonction g définie sur $[0,\pi]$ *, par :* $g(x)=\begin{cases} f\left(-\frac{x}{\sin x}\right) & \text{si} \quad x\in\,]0,\pi[\\ -1 & \text{si} \quad x=0 \\ 1 & \text{si} \quad x=\pi \end{cases}$

a) Calculer $\lim\limits_{0^+} g$, $\lim\limits_{\pi^-} g$.

b) Montrer que g est continue sur $[0,\pi]$.

c) Montrer que l'équation $g(x) = x-2$ *admet au moins une solution dans* $]0,\pi[$

Correction :

Ex 3

2) $D_{f\circ f} = \{x \in \mathbb{R}^* / f(x) \in \mathbb{R}^*\}$

$D_{f\circ f} = \mathbb{R} \setminus \{0, -2, 1, 3\}$

3) a/ On a :

$\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{-x}{\sin x} = \lim\limits_{x \to 0^+} - \frac{1}{\frac{\sin x}{x}} = -1.$

$\lim\limits_{x \to -1} f(x) = f(-1) = 1$

$\Rightarrow \lim\limits_{x \to 0^+} f\left(\frac{-x}{\sin x}\right) = 1$

On a :

$\lim\limits_{x \to \pi^-} \frac{-x}{\sin x} = -\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 1$

alors $\lim\limits_{x \to \pi^-} f\left(\frac{-x}{\sin x}\right) = 1.$

Sig $\lim\limits_{x \to 0^+} g(x) = -1$

$\lim\limits_{x \to \pi} g(x) = 1.$

3) b/ . La fonction $x \mapsto \sin x$ est non nulle et contie sur $]0, \pi[$

. La fct $x \mapsto -x$ contie sur $]0, \pi[$

alors la fct $x \mapsto \frac{-x}{\sin x}$ " " "

. La fct f contie sur $\mathbb{R}^*$

or $x \mapsto \frac{-x}{\sin x}$ ne

alors $x \mapsto g(x)$ contie sur $]0, \pi[$.

Comme $\lim\limits_{x \to \pi^-} g(x) = -1 = g(\pi)$

$\Rightarrow$ g contie à gauche en π.

Comme $\lim\limits_{x \to 0^+} g(x) = 1 = g(0)$

$\Rightarrow$ g contie à droite en 0.

$\Rightarrow$ g contie sur $[0, \pi]$

c) On pose $h(x) = g(x) - (x-2)$.

Comme g contie sur $[0, \pi]$

" $x \mapsto x-2$ " " "

$\Rightarrow$ h contie sur $[0, \pi]$

or $h(0) = 1$

$h(\pi) = 3 - \pi$

$h(0) \cdot h(\pi) < 0$

D'après le corollaire de Theorème des valeurs intermédiaires

$h(\alpha) = 0$ admet au moins une sol α dans $]0, \pi[$.

Sig $g(\alpha) = \alpha - 2$ admet au moins une sol.