Lycée pilote de Bizerte	Test de controle n°3	Prof:M.Benali

EX (1) :

Choisir la réponse correcte dans chacun des cas suivants :

1) L'argument du nombre complexe $z = ie^{-i\frac{\pi}{6}}$ est :

a) $-\frac{\pi}{6}$ b) $\frac{\pi}{3}$ c) $\frac{2\pi}{3}$

2) L'ensemble des solutions de l'équation $iz^2-(a+i)z+a=0$ est

a) $S=\{1,-ia\}$ b) $S=\{i,a\}$ c) $S=\{-1,ia\}$

3) Soit $z=-e^{i\theta}$ un nombre complexe alors une racine carrée de z est :

a) $z=ie^{i\sqrt{\theta}}$ b) $z=ie^{i\frac{\theta}{2}}$ c) $z=e^{-i\frac{\theta}{2}}$

4) Soit f la fonction définie par $f(x)=1-\frac{x^3+\sqrt{x+1}}{x^2}$ alors la courbe représentative de f admet au voisinage de $+\infty$ une asymptote d'équation :

a) y = 1-x b) y = x+1 c) y = 1

EX (2) :

On considère dans C l'équation : $(E): z^2-(4\cos\theta)z+4=0$ où $\theta\in[0,\pi]$

1)a/ Pour quelles valeurs de θ l'équation (E) admet une seule racine

b/ Résoudre dans C l'équation (E) pour tout $\theta\in]0,\pi[$.

c/ Pour $\theta\in]0,\pi[$ écrire les solutions de (E) sous la forme exponentielle.

d/ Résoudre dans C^* l'équation : $z^2+\frac{4}{z^2}=4\cos\theta$ où $\theta\in]0,\pi[$

2) On suppose dans la suite de l'exercice que $\theta\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$.

Soit dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(o,\vec{u},\vec{v})$ les points A , B et C d'affixes respectives: $2e^{i\theta}$; $4\cos\theta$ et $2e^{-i\theta}$.

a/ Ecrire $\frac{z_B-z_C}{z_B-z_A}$ sous la forme exponentielle .En déduire la valeur de θ pour la quelle le triangle ABC est équilatéral.

b/ Placer les points A,B et C pour la valeur de $\theta=\frac{\pi}{6}$

3) a/ Montrer que pour tout $\theta\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ les points A,B et C sont non alignés.

b/ On désigne par I le centre du cercle ζ circonscrit au triangle ABC .Montrer que l'affixe z_I de I est réel.

c/ Déterminer l'affixe de I et le rayon du cercle ζ en fonction de θ

4/ a/ Montrer que pour tout $\theta\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ OABC est un losange

b/ Calculer en fonction de θ l'aire du losange OABC.

c/ Pour quelles valeurs de θ OABC est un carré.

Exercice 3

Pour tout entier naturel non nul n,on considère la fonction f_n définie sur $[0,+\infty[$ par $f_n(x) = x + n\sqrt{\dfrac{x}{x+1}}$.

1) Dans cette question, on prend n=1. On considère la fonction g définie sur $[0,+\infty[$ par $g(0) = 1$ et $g(x) = \dfrac{\sin(f_1(x))}{\sqrt{x}}$ si $x \succ 0$.

a) Montrer que g est continue à droite en zéro.

b) Déterminer la limite de g en $+\infty$.

2) Montrer que pour entier naturel non nul n, la fonction f_n est strictement croissante sur $[0,+\infty[$.

3) a) Montrer que pour entier $n \geq 1$, l'équation $f_n(x) = 1$ admet dans $]0,1[$ une unique solution α_n.

b) Montrer que pour entier naturel non nul n et pour tout réel positif x, $f_{n+1}(x) - f_n(x) \geq 0$.

c) En déduire que pour entier $n \geq 1$, $f_{n+1}(\alpha_n) \geq 1$ et que la suite (α_n) est décroissante.

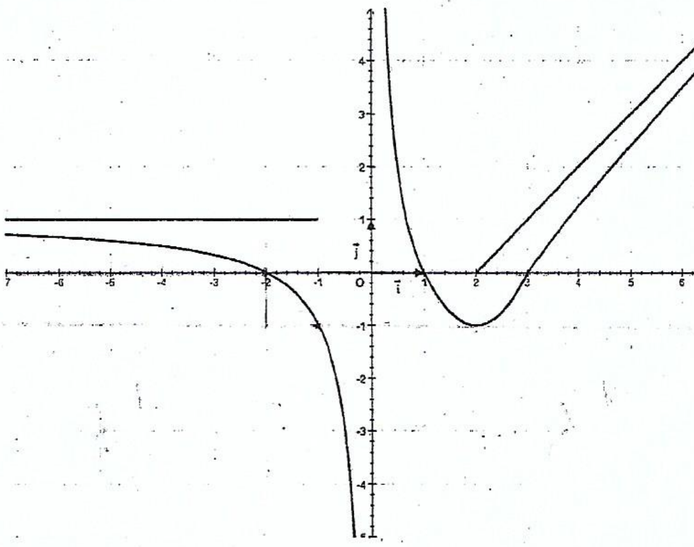
d) En déduire que la suite (α_n) est convergente.

e) Vérifier que pour tout entier $n \geq 1$, $\sqrt{\dfrac{\alpha_n}{1+\alpha_n}} = \dfrac{1-\alpha_n}{n}$ et en déduire la limite de (α_n).

Exercice 4

La courbe ci-contre est la représentation graphique d'une fonction f définie et continue sur $\mathbb{R}^*$.

Les droites d'équations respectives $y = 1$, $x = 0$ et $y = x - 2$ sont des asymptotes à C_f.



1) Déterminer $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{f(x)-1}$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{(f\circ f)(x)}{x}$.

2) a) Déterminer l'ensemble de définition de f o f.

b) Résoudre graphiquement l'inéquation $(f \circ f)(x) < -1$.

3) Soit la fonction g définie par

$$g(x) = \begin{cases} f\left(-\dfrac{x}{\sin x}\right) & \text{si } x \in]0,\pi[\\ -1 & \text{si } x = 0 \\ 1 & \text{si } x = \pi \end{cases}$$

a) Montrer que g est continue sur $[0, \pi]$.

b) Montrer que l'équation $g(x) = x - 2$ admet au moins une solution dans $[0, \pi]$.

4) Montrer que les suites (a_n) et (b_n) définies sur IN* par $a_n = f\left(-\sqrt{n}\right)$ et $b_n = 1 + \dfrac{1}{n}$ sont adjacentes.