Lycée pilote de Bizerte	Test de controle n° 6	Prof:M.Benali

EXERCICE 1

1) *Soit f la fonction définie sur IR par* $f(x)=\frac{4}{3}x^3+\frac{1}{6}$.

Montrer que l'équation $f(x)=x$ *admet une unique solution dans* $\left[0,\frac{1}{3}\right]$.

2)a) *Soit* α *un réel, linéariser* $\sin^3\alpha$.

b) *En déduire que* $\sin\frac{\pi}{18}$ *est l'unique solution de l'équation* $f(x)=x$ *dans* $\left[0,\frac{1}{3}\right]$.

3) *Soit* (U_n) *la suite définie par* $U_0=0$ *et* $U_{n+1}=f(U_n)$. $\forall n\in IN$.

a) *Montrer que pour tout* $n\in IN$, $U_n\in\left[0,\frac{1}{3}\right]$.

b) *Montrer que pour tout* $x\in\left[0,\frac{1}{3}\right]$, $|f'(x)|\leq\frac{4}{9}$.

c) *Montrer que pour tout* $n\in IN$, $\left|U_{n+1}-\sin\frac{\pi}{18}\right|\leq\frac{4}{9}\left|U_n-\sin\frac{\pi}{18}\right|$.

d) *En déduire que pour tout* $n\in IN$, $\left|U_n-\sin\frac{\pi}{18}\right|\leq\frac{1}{3}\left(\frac{4}{9}\right)^n$.

e) *A partir de quel entier n,* U_n *sera une valeur approchée de* $\sin\frac{\pi}{18}$ *à* 10^{-3} *prés.*

EXERCICE 2

Dans le plan orienté , on considère un carré $ABCD$ de sens direct et de centre O . On désigne par $R=r_{\left(A,\frac{\pi}{2}\right)}$; $T=t_{\overrightarrow{AC}}$ et $S=S_C$.

1°) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques des applications suivantes : $f=ToR$; $g=SoToR$ et $h=fog$.

2°) a – Caractériser l'application $f^{-1}og$; avec f^{-1} désigne l'application réciproque de f .

b – Déduire qu'il existe un seul point M du plan vérifiant $f(M)=g(M)$.

3°) On désigne par $I=A*B$ et $J=B*C$.

a – Montrer qu'il existe unique déplacement φ vérifiant $\varphi(A)=C$ et $\varphi(B)=D$. Caractériser φ .

b – Soit ψ l'antidéplacement vérifiant $\psi(A)=C$ et $\psi(B)=D$. Déterminer $\psi o\varphi(C)$ et $\psi o\varphi(D)$ caractériser alors $\psi o\varphi$.

c – Déduire la forme réduite de ψ .

EXERCICE 3

Soit f la fonction définie sur $[-1,1]$ *par* $f(x)=\dfrac{2x}{x^2+1}$.

On désigne par (C) *la courbe représentative de f relativement à un repère orthonormé* $(O,\vec{i},\vec{j})$.

I)

1)*a) Dresser le tableau des variations de la fonction f.*

b) Ecrire l'équation de la tangente (T) *à* (C) *au point O.*

c) Construire la courbe (C) *et la droite* $\Delta : y=x$. *Préciser la position de* (C) *par rapport à* Δ.

2) *Soit* (u_n) *la suite définie par* $\begin{cases} u_0 \in \left]-1,0\right[\\ u_{n+1}=f(u_n) \text{ pour tout } n\in IN. \end{cases}$

a) Montrer que pour tout $n \in IN$, $u_n \in \left]-1;0\right[$.

b) Montrer que (u_n) *est monotone. En déduire que* (u_n) *est convergante et calculer sa limite.*

3) *Soit g la fonction définie sur* $[-1;1]$ *par:* $g(x)=\dfrac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}$.

Etudier la dérivabilté de g sur $[-1;1]$ *puis calculer* $g'(x)$ *lorsqu'elle existe.*

4) *Soit* (v_n), (w_n) *et* (α_n) *trois suites définie par :*

$$v_n=g\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\ \forall n\in IN^* \quad , \quad w_n=\frac{1}{\sqrt{n}}\left(\sum_{p=2}^{n} g\left(\frac{1}{\sqrt{p}}\right)\right)\ \forall n\geq 2 \quad \text{et } \alpha_n=\frac{1}{\sqrt{n}}\left(\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{p}}\right),\ \forall n\in IN^*$$

a) Montrer que (v_n) *est convergante et donner sa limite.*

b) Montrer que $\forall p\geq 2$, *on a :* $g\left(\dfrac{1}{\sqrt{p}}\right)=\sqrt{p}-\sqrt{p-1}$, *en déduire que* (w_n)

est convergente et donner sa limite.

c) Montrer que, $\forall p\in IN^*-\{1\}$, *on a :* $\dfrac{1}{2\sqrt{p}}\leq g\left(\dfrac{1}{\sqrt{p}}\right)\leq \dfrac{1}{2\sqrt{p-1}}$. *En déduire que :*

$$\alpha_n-\frac{1}{\sqrt{n}}\leq 2w_n\leq \alpha_{n-1}\ ,\forall n\geq 2 \ \text{ et par suite que: } 2w_{n+1}\leq \alpha_n\leq 2w_n+\frac{1}{\sqrt{n}}\quad \forall n\in IN^*.$$

d) Montrer que (α_n) *est convergante et donner sa limite.*

II) Pour tout x de $[0;2]$, *on pose* $h(x)=g\left(\cos\left(\dfrac{\pi}{2}x\right)\right)$.

Montrer que h est dérivable sur $[0;2]$ *et que pour tout* $x\in[0,2]$ $h'(x)=\dfrac{-\pi}{2\left(1+\sin(\frac{\pi}{2}x)\right)}$.

*** *Bon Travail* ***