Lycée pilote Bourguiba de Tunis	Série Arithmétiques 3
Mr:Barhoumi	4ème Math 2020/2021

Exercice 1 :

(u_n) est une suite géométrique croissante de premier terme u_0 et de raison q vérifiant : $\begin{cases} \ln(u_1)+\ln(u_2)=11 \\ u_1+u_2=e^4(1+e^3) \end{cases}$

1)a)Calculer u_1 et u_2 puis déduire la valeur de q.

b)Exprimer u_n en fonction de n.

c)Soit $S_n=\sum_{k=0}^{n}\ln(u_k)$. Montrer que $S_n=\dfrac{3n^2+5n+2}{2}$.

2)Pour tout n de $\mathbb{N}$,on pose $a_n=n+3$.

a)Montrer que : $a\wedge b=(a-kb)\wedge b$ où a, b et k sont des entiers non nuls.

b)Déduire que $(2S_n)\wedge a_n=a_n\wedge 14$.

c)Déterminer alors les valeurs possible de $(2S_n)\wedge a_n$.

d)Déterminer n pour que $(2S_n)\wedge a_n=7$.

3)a)Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation :5x-7y=3.

b)On pose $b_n=3(1+na_n)-2S_n+1987^{2018}$. Déterminer n pour que : $\begin{cases} n\equiv 0(\text{mod } 5) \\ b_n\equiv 0(\text{mod } 7) \end{cases}$

Exercice 2:

1)a) Montrer que $6^{40}\equiv 1(\text{mod } 11)$ et que $6^{40}\equiv 1(\text{mod } 5)$.

b) En déduire que $6^{40}\equiv 1(\text{mod } 55)$.Déduire le reste modulo 55 de 6^{561}.

2)Soient a et b deux entiers naturels tel s que $a^{17}\equiv b(\text{mod } 55)$ et $a^{40}\equiv 1(\text{mod } 55)$.

Montrer que $b^{33}\equiv a(\text{mod } 55)$

3)Montrer que l'équation : 55x - 40y =1 ; n'a pas de solutions dans $\mathbb{Z}^2$.

4)Soit l'équation (E) : 17x – 40y = 1 ; $(x,y)\in\mathbb{Z}^2$.

a)Montrer que si (x,y) est une solution de (E) alors $x \equiv -7 \pmod{40}$.

b)En déduire une solution particulière de (E).

c)Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation (E).

d)En déduire les couples (x,y) d'entiers tel que

17x-40y =7 et $x \wedge y = 7$.

Exercice 3:

1)a)Montrer que pour tout entier n , les entiers (14n+3) et (5n+1) sont premiers entre eux..

b)En déduire les entiers u et v tels que 31u - 11v=1.

2)On considère dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation (E) : 31x-11y=3.

a)Donner une solution particulière (x_0 ,y_0)de (E).

b)Déterminer l'ensemble des solutions dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ de l'équation (E).

3°On considère le système $(S):\begin{cases} x \equiv 2 \pmod{31} \\ x \equiv 5 \pmod{11} \end{cases}$ où x est un entier.

Montrer que x est solution du système (S) si et seulement si $x \equiv 126 \pmod{341}$.

4)Soit l'entier $N = 5 - 3 \times 121^{2010}$. Déterminer le reste modulo 341 de N .

Exercice 4 :

1) Etudier suivant les valeurs de l'entier naturel n le reste de la division euclidienne de 5^n par 7.

2/)Pour tout entier naturel n, on pose $S_n = 1 + 5 + 5^2 + ... + 5^n$.

a) Montrer que : $4S_n = 5^{n+1} - 1$

b)Soit a un entier, montrer que : $4S_n \equiv a \pmod 7$ si et seulement si $S_n \equiv 2a \pmod 7$

c)En déduire le reste de la division euclidienne de S_{2010} par 7.

3)Soit n un entier naturel donné.

On considère dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ les équations $(E_0): 5^n x - S_n y = 0$ et $(E): 5^n x - S_n y = 7$

a)Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, S_n et 5^n sont premiers entre eux.

b)Résoudre l'équation (E_0).

c)Montrer que les solutions de (E) sont les couples (x, y) tels que $x = 35 + kS_n$ et $y = 28 + k5^n$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

4)Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ le système $\begin{cases} 25x - 31y = 7 \\ x \wedge y = 7 \end{cases}$.

Exercice 5:

1)a)Déterminer suivant l'entier n le reste modulo 8 de3^n .

b)En déduire l'entier $A_n = 3^{2n}-1$ est divisible par 8.

c)Déterminer le reste modulo 8 de l'entier

$3^{120} - 3^{121} + 3^{122}$.

2)a)Trouver une solution particulière de l'équation

(E) :91x+10y=1. b)Résoudre (E)dans $\mathbb{Z}^2$.

3)Soit dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation (E') :$A_3x+A_2y=24$.

a)Déduire que les solutions de (E') sont les couples

(x,y) tels que x=10k+3 et y=-91k-27 ; $k \in \mathbb{Z}$.

b)Montrer que $x \wedge y = 3$ si et seulement si $k \equiv 0(\text{mod}\,3)$.

c)En déduire les solutions de (E') tels que $x \wedge y = 3$ et $-510 \le x + y \le 867$.

Exercice 6 :

On considère l'équation (E) : $(E): 35x - 53y = 1$,

où (x ; y) est un couple de nombres entiers relatifs.

1) a) Vérifier que $(-3,-2)$ est une solution de l'équation (E).

b) Résoudre alors dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation (E).

c) On considère dans $\mathbb{N}$ le système $(S): \begin{cases} n \equiv 2[\text{mod}\,5] \\ n \equiv 1[\text{mod}\,7] \end{cases}$

Montrer que n est solution de (S) si et seulement si $n \equiv 22[\text{mod}\,35]$.

d) Un fleuriste sait qu'il possède entre 1500 et 2000 fleurs.

- S'il fait des bouquets de 35 fleurs il lui reste 22 fleurs.
- S'il fait des bouquets de 53 fleurs il lui reste 23 fleurs. Combien a-t-il des fleurs ?

2) Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j})$ .Soit la droite $D: 35x - 53y = 1$

a) Déterminer le plus petit inverse positif de 35 modulo 53

b) On désigne par le point M_P de la droite D d'abscisse 23^P .Déterminer suivant les valeurs de l'entier naturel p le reste modulo 53 de 23^P .

c) Existe-t-il p pour laquelle M_P soit de coordonnés entières ?.

Exercice 7 :

1. a. Déterminer deux entiers relatifs u et v tels que : $7u - 13v = 1$.

b. En déduire deux entiers relatifs u_0 et v_0 tels que $14u_0 - 26v_0 = 4$.

c)Déterminer tous les couples (a, k) d'entiers relatifs tels que $14a - 26k = 4$.

2)On considère deux entiers naturels a et b. Pour tout entier n, on note $\varphi(n)$ le reste de la division euclidienne de $an + b$ par 26.

On décide de coder un message, en procédant comme suit : à chaque lettre de l'alphabet on associe un entier compris entre 0 et 25, selon le tableau :

Lettre	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
Nombre	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Lettre	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
Nombre	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

Pour chaque lettre α du message, on détermine l'entier n associé puis on calcule $\varphi(n)$. La lettre α est alors codée par la lettre associée à $\varphi(n)$.

On ne connaît pas les entiers a et b, mais on sait que la lettre F est codée par la lettre K et la lettre T est codée par la lettre O.

a)Montrer que les entiers a et b sont tels que : $\begin{cases} 5a+b \equiv 10[\text{mod } 26] \\ 19a+b \equiv 14[\text{mod } 26] \end{cases}$.

b)En déduire qu'il existe un entier k tel que $14a - 26k = 4$.

c)Déterminer tous les couples d'entiers (a, b), avec

$0 \leq a \leq 25$ et $0 \leq b \leq 25$, tels que $\begin{cases} 5a+b \equiv 10[\text{mod } 26] \\ 19a+b \equiv 14[\text{mod } 26] \end{cases}$.

3)On suppose que $a = 17$ et $b = 3$.

a)Coder le message « GAUSS ».

b)Soit n et p deux entiers naturels quelconques. Montrer que, si $\varphi(n) = \varphi(p)$, alors $17(n-p) \equiv 0[\text{mod } 26]$.

En déduire que deux lettres distinctes de l'alphabet sont codées par deux lettres distinctes.

4)On suppose que $a = 17$ et $b = 3$.

a. Soit n un entier naturel. Calculer le reste de la division euclidienne de $23\varphi(n) + 9 - n$ par 26.

$23 \times 17n + 3 \times 23 + 9 - n \equiv 0\ (\text{mod } 26)$

b. En déduire un procédé de décodage.

c. En déduire le décodage du message « KTGZDO ».

Lycée pilote Bourguiba de Tunis	**Divisibilité** **Série 2**	**4ème Math**
Mr :Barhoumi	**Mathématiques**	**2020/2021**

Exercice 1 :

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n non nul par : $u_n = 2^n + 3\times 7^n + 14^n - 1$.

1) a) Calculer u_3.

b) Montrer que, pour tout entier naturel n non nul, u_n est pair.

c) On note E l'ensemble des nombres premiers qui divisent au moins un terme de la suite (u_n). Les entiers 2, 3, 5 et 7 appartiennent-ils à l'ensemble (E) ?.

2) Soit p un nombre premier strictement supérieur à 7.

Soient m et n deux entiers naturels tels que 14 = m.n.

a) Quelles sont les valeurs possibles de m?

b) Montrer que $14m^{p-2} \equiv n[\bmod p]$

c) En déduire que $14u_{p-2} \equiv 0[\bmod p]$.

d) L'entier p appartient-il à l'ensemble E ?

e) Déterminer alors E.

Exercice 2:

1) Soit n un entier naturel.

a/ Déterminer selon n les restes possibles de 3^n modulo 8.

b/ Résoudre dans $\mathbb{N}$: $5^{n+4} - 3^n + 6 \equiv 0[\bmod 8]$.

2) Montrer que pour tout n > 0 , on a : $2^n + 4^n \equiv 6^n[\bmod 8]$

3) On se propose de déterminer tous les couples d'entiers naturels (*m*, *n*) , solutions de l'équation :

$2^m - 3^n = 1 \quad (1)$.

a/ Déterminer les restes possibles de $3^n + 1$ modulo 8.

b/ Soit (m, n) un couple solution de l'équation (1).Montrer, à l'aide de a), que $m \leq 2$.

4) En déduire tous les couples (*m*, *n*) d'entiers naturels, solutions de l'équation (1).

Exercice 3:

Partie A : a et b étant deux entiers naturels non nul tel que $a^3 + b^3 \equiv 0[\bmod 173]$.

1) Montrer que : $a^{171} \equiv -b^{171}[\bmod 173]$.

2)a) vérifier que 173 est premier .

b) Montrer que $a \equiv 0[\bmod 173] \Leftrightarrow b \equiv 0[\bmod 173]$:

3) Montrer que : $si\ a \equiv 0[\bmod 173]\ \ alors\ a + b \equiv 0[\bmod 173]$.

4) Supposons que 173 ne divise pas a.

a) Prouver que : $a^{172} \equiv b^{172}[\bmod 173]$.

b) Montrer que : $a^{171}(a+b) \equiv 0[\bmod 173]$.

c) En déduire que 173 divise (a+b).

Partie B

On considère dans $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ l'équation suivante : $(E): x^3 + y^3 = 173(xy+1)$.

Soit (x, y) un élément de $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ solution de (E), On pose x + y = 173k où $k \in \mathbb{N}^*$.

1) Vérifier que : $k(x-y)^2 + (k-1)xy = 1$.

2) Montrer que $k=1$ puis résoudre l'équation (E).

Exercice 4:

On considère la suite d'entiers naturels (u_n) définies par : $\begin{cases} u_0 = 2009^2 - 1 \\ u_{n+1} = (1+u_n)^5 - 1 \end{cases}$

1)Montrer que $2009^{8001} \equiv 2009[\mathrm{mod}\,16]$.

2)a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = u_n\left[(u_n)^4 + 5(u_n)^3 + 2(u_n)^2 + 2u_n + 1\right]$

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n \equiv 0\left[\mathrm{mod}\,5^{n+1}\right]$.

c) Calculer u_3 . En déduire que $2009^{8001} \equiv 2009(\mathrm{mod}\,625)$.

d) Déterminer un entier a tel que a^3 se termine par 2009 .

3) a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n \equiv -1[\mathrm{mod}\,7]$.

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est divisible par 8.

Exercice 5 :

1. Déterminer suivant les valeurs de l'entier naturel n , le reste de la division euclidienne de 5^n par 7.

2. Pour tout entier naturel n on pose : $T_n = \sum_{k=0}^{n} 5^k$.

a. Soit a un entier, montrer que : $4T_n \equiv a[\mathrm{mod}\,7]$ si et seulement si $T_n \equiv 2a[\mathrm{mod}\,7]$.

b. En déduire le reste de la division euclidienne de T_{2021} par 7.

Exercice 6 :

Soit n un entier naturel non nul. On pose : $a_n = 333....31$; (n *fois le chiffre* 3).

1°)a) Justifier que a_1 et a_2 sont des nombres premiers.

b) Montrer que pour tout entier naturel non nul n, $3a_n + 7 = 10^{n+1}$.

2°) Montrer que pour tout entier naturel k, . $10^{30k+2} \equiv 7[\mathrm{mod}\,31]$.

3°)a) Montrer que pour tout entier naturel k, . $3a_{30k+1} \equiv 0[\mathrm{mod}\,31]$.

b) En déduire que 31 divise a_{30k+1}.

4°) Résoudre ,dans $\mathbb{N}$, l'équation $(E): 2x^{31} \equiv 7[\mathrm{mod}\,31]$.

Exercice 7:

1°)a) Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation : $x^2 \equiv 7[\mathrm{mod}\,29]$.

b) Etablir l'équivalence : $x^2 - 19x - 11 \equiv 0[\mathrm{mod}\,29]$ si et seulement si $(x+5)^2 \equiv 7[\mathrm{mod}\,29]$.

c) En déduire les solutions dans $\mathbb{Z}$ de l'équation : $x^2 - 19x - 11 \equiv 0[\mathrm{mod}\,29]$.

2°) Montrer que pour tout entier naturel n, $6^n - 13^n$ est divisible par 7.

3°) Pour tout entier naturel n, on considère le nombre . $A_n = 7^n + 3^n$.

a) Vérifier que . $7^4 \equiv 1[\bmod 10]$ et $3^4 \equiv 1[\bmod 10]$.

b) En déduire suivant les valeurs de n, le reste modulo 10 de A_n .

c) Déterminer le chiffre des unités du nombre $2017^{2021} + 2013^{2021}$.

Exercice 8 : TN 2019

Soit l'équation : $(E'): x^{19} \equiv -2[\bmod 29]$.

1) Justifier que : $2^{28} \equiv 1[\bmod 29]$ et en déduire que - 8 est solution de (E').

2) Soit x_0 une solution de (E').

a) Montrer que x_0 n'est pas multiple de 29 et en déduire que $x_0^{28} \equiv 1[\bmod 29]$.

b) Montrer que : $x_0^{57} \equiv -8[\bmod 29]$ puis que $x_0 \equiv -8[\bmod 29]$.

c) En déduire l'ensemble des solutions dans $\mathbb{Z}$ de l'équation (E').

d) Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation : $(x-3)^{19} \equiv -2[\bmod 29]$.

4) Résoudre le système : $\begin{cases} (x-3)^{19} \equiv -2[\bmod 29] \\ (x-3)^{13} \equiv -2[\bmod 13] \end{cases}$

Exercice 9 :

A-1) Soit p un entier naturel non nul et m un entier naturel impair.

Vérifier que $p \equiv -1[\bmod (1+p)]$ puis montrer que $1+p$ divise $1+p^m$.

2) Soit $a \in \mathbb{N}$ tel que $a \geq 2$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

En utilisant un raisonnement par l'absurde montrer les deux propositions suivantes :

a) Si $1+a^n$ est un nombre premier alors a est pair.

b) Si $1+a^n$ est un nombre premier alors n est une puissance de 2.

(On posera $n = 2^\alpha \times q$ où α est un entier naturel et q est un entier naturel impair différent de1).

3) Les nombres $1+2020^{12}$ et $1+2021^{32}$ sont-ils premiers (Justifier la réponse).

B-1) On définit la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ de nombres entiers par $u_n = 1+6^{2^n}$.

a) Vérifier que $u_3 \equiv 0[mod 17]$.

b) Soit n et k deux entiers naturels avec k≥1 . Vérifier que $u_{n+k} - 1 = (u_n - 1)^{2^k}$.

c) En déduire que $u_{n+k} \equiv 2[\bmod u_n]$.

d) Prouver que deux termes distincts de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ sont premiers entre eux.

2) Montrer que pour tout entier naturel $n \geq 0$, le chiffre des unités de u_n est égal à 7.

3) Les entiers u_n sont –ils tous premiers ? Justifier.