L'arithmétique, c'est être capable de compter jusqu'à vingt sans enlever ses chaussures . ***Walt Disney***

Exercice1 : Vrai ou Faux

Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou si elle est fausse en justifiant la réponse. Dans ce qui suit a, b et c trois entiers.

1) Si $a^2 \equiv b^2 \pmod 8$ alors $a \equiv b \pmod 8$

2) Si $2a \equiv 2b \pmod 8$ alors $a \equiv b \pmod 8$

3) Si a divise b et a divise c alors a^2 divise bc

4) Le reste de la division euclidienne de 2^{2010} par 11 est égal à 1

5) Si un entier x est telle que : $x^2+x \equiv 0$ [mod 6] alors $x \equiv 0$ [mod 3]

6) Pour tout n, on pose $a_n= 2^n + 3^n$ alors $a \equiv 0 (mod 5)$ pour tout n impair

7) Si $2a \equiv 2b \pmod 7$ alors $a \equiv b \pmod 7$

8) Pour tout entier naturel n: $5^{6n+1} + 2^{3n+1}$ est divisible par 7.

9) : « Le reste de la division euclidienne de 2011^{2011} par 7 est 2 ».

10) On considère l'entier $N = 11^{2\,011}$. L'entier N est congru à 4 modulo 7.

11)

a) $x^3 \equiv x \pmod 2$.

b) Si $x \equiv 2 \pmod{14}$ alors $x \equiv 1 \pmod 7$.

c) Si $4x \equiv 10y \pmod 5$ alors $x \equiv 0 \pmod 5$.

12) $\sum_{k=1}^{2014} k! = 3$ [10]

13) Sachant que 2011 est premier. On a : $2013^{2011} \equiv 1$ [2011]

14) Soit x un entier.

Si $x^2 \equiv 1 [9]$ alors $x \equiv 1 [3]$

Exercice 2 :

Compléter le tableau des restes dans la congruence modulo 5.

$n \equiv$	0	1	2	3	4
$n^2 \equiv$					

Déduire que l'équation $x^2 - 5y^2 \equiv 3$ [5], avec x et y entiers naturels , n'admet pas de solution.

Exercice 3 ;

Quel est le reste dans la division euclidienne de 4^{2015} par 7 ?

Exercice 4:

1) Déterminer, suivant les valeurs de n, le reste modulo 5 de 3^n.

2) On pose $A_n=3^n+3^{2n}+3^{3n}$

Déterminer, suivant les valeurs de n, le reste de la division de A_n modulo 5

Exercice 5 :

1) Montrer que pour tout n de IN, $n^3 + 5n$ est un multiple de 6.

2) En déduire que les entiers suivants sont des multiples de 6.

a) $n^3 + 17n + 12$; b) $n^3 + 2015n$

Exercice 6:

1)a) Déterminer, suivant les valeurs de n, le reste modulo 3 de 2^n.

b) Déterminer le reste modulo 3 de $(40502)^{2009}$

2)a) Mque pour tout n de IN, $5^{2n} \equiv 1 (mod3)$

b) Déterminer l'ensemble des entiers naturels tels que $2^n-5^{2n} \equiv 0(mod3)$

3) Déterminer l'ensemble des entiers naturels n tels que : $(40502)^n-(40525)^n \equiv 3(mod3)$

Exercice 7 :

Soit $n \in IN$

1) Démontrer que le chiffre de unités de n est donné par le reste de la division euclidienne de n par 10

2)a) Déterminer les restes possibes de 3^n (mod10).

b) Quel est le chiffre des unités de $N_1=3^{1029}$

c) Quel est le chiffre des unités de

$N_2=373^{2531}x2353^{190}$

3)a) Déterminer, suivant les valeurs de n, le reste modulo 10 de 7^n.

b) En déduire le chiffre des unités du nombre 43578707^{4327}

4) Soit $n \geq 2$

a) Démontrer par récurrence que le reste de la division euclidienne de 6^n par 10 est 6

b) Quel est le chiffre des unités de 9^n

c) En déduire le chiffre des unités de $N_3=426^{1259}x859^{12235}$

5) Quel est le chiffre des unités de $6^n x 9^n$

Exercice 8 :

a et b deux entiers tels que

$a \equiv 5 \pmod 7$ et $b \equiv 3 \pmod 7$.

Déterminer les restes de la division euclidienne par 7 de :

a) $2a + 5b$ b) $a^2 + 11b$ c) $a^2 + 3 b^2$

Exercice 9:

1) Quel est le reste de division euclidienne de 6^{943} par 7.

2) Quel est le reste de division euclidienne de 247^{349} par 7.

Exercice 11:

Soit p un nombre premier.

1) Montre que pour tout $k \in \{1,2,...,p-1\}$

on a $C_p^k \equiv 0$ (mod p)
2)Montrer alors que pour tout entier naturel a
on a : $a^p \equiv a$ (mod p)
3)Démontrer que pour tout entier n, n^5-n est divisible par 10
4)a)Soit a et b deux entiers naturels Traduire en terme de congruence la propriété : a et b ont le même chiffre des unités
b)Soit n $\in$IN et p $\in$IN*
Démontrer que n^{p+4} et n^p ont le même chiffre des unités

Exercice 12:
Soit a et b deux entiers non nuls et n un entier naturel impair.
1)a)Démontrer que a+b divise a^n+b^n
b)En déduire que 15 divise $2^{45}+5^{45}+10^{45}+13^{45}$
2)Prouver, sans effectuer de division, que 14 divise 1064

Exercice 13 :
Montrer que pour n entier naturel, $(n+1)^n$-1 est divisible par n^2 .

Exercice 15:
Montrez que pour tout entier naturel *n*, $3^{n+3} - 4^{4n+2}$ est divisible par 11.
Montrez que pour tout *n* entier naturel, $3^{2n+1} + 2^{n+2}$ est divisible par 7

Exercice 16 :
Déterminez l'ensemble des *x* entiers relatifs tels que : $x^2 + 3x$ soit divisible par 7.

Exercice 17 :
Démontrer que $2^{770} - 5^{2477} \equiv 1$ (mod 7)

Exercice 18 :
x et y désignent des entiers.
a)Dque $x^2 \equiv 0$ (mod 8) ou $x^2 \equiv 1$(mod 8) ou $x^2 \equiv 4$(mod8)
b)en déduire les restes possibles de la division euclidienne de $x^2 + y^2$ par 8

Exercice 19:
Déterminer tous les entiers n tels que
$n^2 \equiv 4 - 2n$ (mod 5)

Exercice 20 :
On considère le système de congruences
$\begin{cases} n \equiv 2 \ (mod\ 3) \\ n \equiv 1 \ (mod 5) \end{cases}$; où n désigne un entier relatif.
1. Montrer que 11 est solution de (S).
2. Montrer que si n est solution de (S) alors n − 11 est divisible par 3.
3. Montrer que les solutions de (S) sont tous les entiers de la forme 11 + 15 k, où k désigne un entier relatif.

Exercice 21 ;
Les quatre questions sont indépendantes.
1° Résoudre dans Z, l'équation $x^2 + x \equiv 5$ [7]
2° a)Montrer que, pour tout entier naturel n, $7^{2n} \equiv 1$ [8]
b)En déduire le reste modulo 8 de 2009^{2010}
3°Déterminer les entiers naturel n tels que
27$\equiv$ 5 [n]
4°Soit n un entier naturel non nul,
$x = 2^n + 1$ et $y = 2^{n+1} - 3$
Soit d un entier naturel qui divise x et y.
a) Montrer que d = 1 ou d = 5
b) Donner, suivant les valeurs de n, le reste modulo 5 de 2^n .

Exercice 22:
1)Déterminer suivant les valeurs de l'entier naturel n, les restes possibles modulo 7 de 2^n.
2)Montrer que pour tout n є IN, $2^{3n} - 1 \equiv 0$(mod7).
3)Quel est le reste modulo 7 de 1773^{704}
4)Montrer que pour tout n є IN, on a
$3 \cdot 11^{n+1} + 5^{2n+4} \equiv 0$ (mod7).

Exercice 23:(4 points)
On considère dans IN l'équation (E) : $x^{35} \equiv 2$ [97].
1) Soit x une solution de (E).
a) Vérifier que 97 est premier.
b) Montrer que x et 97 sont premiers entre eux.
c) Justifier que $x^{96} \equiv 1$ [97].
d) En déduire que $x \equiv 2^{11}$ [97].
2) Soit un entier x tel que $x \equiv 2^{11}$ [97]. Montrer que x est solution de (E).
3) Déduire alors l'ensemble des solutions de l'équation (E).

Exercice 24:
Soit x un entier vérifiant $\begin{cases} n \equiv 3 \ (mod\ 8) \\ n \equiv 2 \ (mod 5) \end{cases}$;
a) Montrer que 3x ≡ 1 (mod 40)
b) En déduire qu'il existe un entier k tel que x=40k-13
c) Déterminer, lorsque x > 0, le chiffre des unités de x.

Exercice 25:
Soit a $=\sum_{k=0}^{9} 2011^k$
1) Vérifier que 2011≡ 11 (mod 100)
2) a) Déterminer le reste de 11^n modulo 100.
b) Déduire qu'il existe q de IN tel que
a = 100q+60.
3) Soit N = $\sum_{k=0}^{2009} 2011^k$
a) Montrer que N ≡ 201 a (mod 100)
b) Déterminer alors les deux derniers chiffres de N.