Prof : Baklouti Hédi **Série 2 : Révision $4^{ème}$ Math** **Septembre 19**

Exercice 1

Le plan est rapporté à un R..O.N direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.

On désigne par A, B,C et D les points d'affixes respectives : 2 ; 3+2i ; $-3+i$ et $-4-i$.

Montrer que ABCD est un parallélogramme .

Exercice2

Représenter dans le plan complexe les points A , B et C d'affixes respectives $-2i$; $1+2i$ et $-3+i$.

Déterminer l'affixe du point D tel que ABCD est un parallélogramme .

Exercice 3

On désigne par A ,B et C les points d'affixes respectives $-1+i$; 2 et $3(1+i)$.

Montrer que le triangle ABC est rectangle .

Exercice 4

Montrer que $(1+i)^n+(1-i)^n$ est un nombre réel .

Exercice 5

Déterminer l'ensemble des points M d'affixes z tels que les points d'affixes respectives i ; iz et z soient alignés .

Exercice 6

Soit $z \in \mathbb{C}^*$ .1/Montrer l'équivalence : $\dfrac{2z-1}{z^2} \in IR \Leftrightarrow z=\bar{z}$ ou $2z\bar{z}=z+\bar{z}$

2/En déduire l'ensemble (E) des points M(z) tel que $\dfrac{2z-1}{z^2} \in IR$.

Exercice 7

Pour tout complexe $z \neq 1$ on pose $z'=\dfrac{z-1}{\bar{z}-1}$ et on appelle A ,B , M et M' les points d'affixes 1 , -1 , z et z'

dans le plan complexe rapporté au repère orthonormé $(O,\vec{u},\vec{v})$.

1/Comparer $|z-1|$ et $|\bar{z}-1|$ et en déduire $|z'|$. Traduire géométriquement ce résultat pour le point M'

2/Calculer en fonction de z et $\bar{z}$ le complexe $r=\dfrac{z'+1}{z-1}$ et en déduire que r est réel .

3/Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{BM'}$ sont colinéaires .

4/ Utiliser ce qui précède pour donner une construction géométrique de M' connaissant M , on fera une figure .

Exercice 8

Pour chaque question , une seule des trois propositions est exacte .

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct d'origine O .

1/Soit z un nombre complexe : $|z+i|$ est égal à :

a) $|z|+1$; b) $|z-1|$; c) $|i\bar{z}+1|$

2/Soit z un nombre complexe non nul d'argument θ . Un argument de $\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{\bar{z}}$ est :

a) $-\dfrac{\pi}{3}+\theta$; b) $\dfrac{2\pi}{3}+\theta$; c) $\dfrac{2\pi}{3}-\theta$

3/Soit n un entier naturel . Le complexe $\left(\sqrt{3}+i\right)^n$ est un imaginaire pur si et seulement si :

a) $n=3$; b) $n=6k$ [illegible] $6k$ avec k entier .

Exercice 9 **Vrai ou Faux**

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$,

on considère les points A et B d'affixes respectives : $a = -\sqrt{5} + i\sqrt{15}$ et $b = 2\sqrt{3} + 2i$.

a)Soit $n \in \mathbb{N}$. Un argument de a^n est $\frac{2n\pi}{3}$.

b)O appartient à la médiatrice de $[AB]$.

c)OAB est un triangle rectangle en O .

d)Le cercle circonscrit à OAB a pour rayon 3 .

Exercice 10

1/Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$ on considère les points

A , B , M , M' et M'' d'affixes respectives i , - i , m, z' et z'' avec $z' = -im - 1$ et $z'' = i + m$

où $m \in \mathbb{C}$.

Déterminer l'ensemble Δ des points M d'affixes m tels que $OM' = OM''$.

2/a)On suppose que $|m| = \sqrt{2}$. Montrer alors que le point M'' appartient à un cercle fixe que l'on précisera .

b)On suppose que $\arg(m) \equiv \frac{\pi}{4}\ [2\pi]$.

Montrer alors que le point M' appartient à une demi droite fixe que l'on précisera . à vérifier la rédaction .

3/On suppose dans cette question que $|m| = 1$, $m \neq i$ et $m \neq -i$.

a)Vérifier géométriquement que le triangle AMB est rectangle en M .

b)En déduire que le nombre complexe $Z = \frac{im+1}{m+i}$ est réel .

c)On pose $m = e^{i\theta}$ avec $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$. Montrer que $\frac{-im-1}{m+i} = \tan\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$

Exercice 11

1/Soit φ un réel de l'intervalle $[-\pi, \pi]$ et

z le nombre complexe définie par : $z = \frac{1}{2}(\sin\varphi + i(1 - \cos\varphi))$.

Déterminer en fonction de φ , le module et un argument de z.

2/Dans cette question, φ est un réel de l'intervalle $]0, \pi[$.

Déterminer le module et un argument de chacun des nombres complexes suivants : $z - i$ et $\frac{z}{z-i}$

où z étant le nombre complexe donné au 1°/.

3/Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$ on considère les points M et N d'affixes respectives $z - i$ et $\frac{z}{z-i}$.

Déterminer les ensembles décrits respectivement par les points M et N lorsque φ varie dans l'intervalle $]0, \pi[$

Représenter ces ensembles .