Lycée Pilote Bourguiba
Masmoudi Radhouane
cssmas@gmail.com
www.masmaths.net

Série Isométries

EXERCICE 1:

Répondre par vrai ou faux en justifiant la réponse.

1) $ABCD$ un parallélogramme de centre O. $S_{(AD)} o S_O = S_{(BC)}$ si et seulement si $ABCD$ est un losange.
2) On donne les points $A(1,1)$, $B(2,0)$, $C(3,-1)$, $D(1,5)$ et $E(0,6)$. Si f est une isométrie telle que $f(A) = D$ et $f(B) = E$ alors $f(C)$ est le barycentre des points pondérés $(D,1)$ et $(E,-2)$.
3) Si I est le milieu de $[AB]$ alors $S_{(IB)} o t_{\vec{AI}} o S_{(AB)} = t_{\vec{AB}}$.
4) Si f est une isométrie qui ne fixe aucun point alors fof est une translation.
5) $ABCD$ un carrée, l'isométrie $S_{(AD)} o S_{(AB)} o S_{(BC)}$ est la symétrie glissante de vecteur $2\vec{BA}$ et d'axe (AB).
6) Δ et $\mathscr{D}$ deux droites perpendiculaires. Si f et g deux symétries glissantes d'axes respectifs Δ et $\mathscr{D}$ alors fog est une symétrie centrale.
7) La composée d'une translation et d'une symétrie orthogonale est une symétrie glissante.
8) $ABCD$ est un rectangle alors $S_{(AB)} o S_{(BC)} o S_{(CD)} o S_{(AD)}$ est une translation.
9) ABC est un triangle équilatéral. f une isométrie telle que $f(A) = B$, $f(B) = C$ et $f(C) = A$ alors $fofof$ est l'identité du plan.

EXERCICE 2 :

$ABCD$ est un losange tel que $\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}}\right) \equiv \frac{\pi}{3}\,[2\pi]$. On désigne par I, J, K, L et O les milieux respectifs des segments $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$, $[AD]$ et $[BD]$. On note Δ et Δ' les médiatrices respectives de $[AB]$ et $[CD]$.

1) Soit f l'isométrie définie par $f(A) = B$, $f(B) = D$ et $f(D) = C$. Montrer que f est une symétrie glissante.
2) Soit R la rotation de centre B et d'angle $-\frac{\pi}{3}$.
   a) Montrer que $f = R o S_\Delta$.
   b) A-t-on $f = S_\Delta o R$.
3) En décomposant R, montrer que $f = S_{(BC)} o T$ où T est une translation dont on précisera le vecteur.
4) Soit $g = t_{\vec{LA}} o f$. Déterminer $g(O)$ et $g(I)$. Caractériser alors g.

EXERCICE 3 :

Soit ABC un triangle isocèle de sommet principal A tel que $\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}\right) \equiv \theta\,[2\pi]$ et $\theta \in \left]0,\pi\right[\setminus \left\{\frac{\pi}{3}\right\}$.

Soit $D = S_{(AC)}(B)$ et A' le milieu de [BC].

1. Soit f une isométrie qui transforme $\{A,B,C\}$ en $\{A,C,D\}$
   a)Montrer que f fixe le point A
   b) en déduire que f est soit une rotation r ou une symétrie orthogonale s que l'on précisera
2. on pose $g = s o r$. Déterminer les images par g des points A, B, C, A'. Caractériser alors g.

EXERCICE 4 :

Soit ABC un triangle rectangle en A et isocèle tel que $\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$. Soit I le milieu de [BC]

1. soit f une isométrie telle que $f(\{B,C\}) = \{B,C\}$ .Montrer que f fixe I. en déduire les isométries f qui vérifient $f(\{B,C\}) = \{B,C\}$ .quelles sont celles qui laissent ABC globalement invariant
2. soit $D = S_{(BC)}(A)$ et g une isométrie qui transforme $\{A,B,D\}$ en $\{A,C,D\}$
   a) Montrer que g(B)= C et que g laisse I invariant
   b) Déterminer les isométries g
3. a) soit Δ le médiatrice [BD]. Caractériser l'isométrie $r = S_{(AD)} o S_{\Delta}$
   b) soit M et N les points tel que $\overrightarrow{AM} = \alpha\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BN} = \alpha\overrightarrow{BD}$ où α> 0. Montrer que $r(M) = N$ .En déduire que la médiatrice de [MN] passe un point fixe.
4. a) Montrer que $S_{\Delta} o S_{(AB)}$ est une translation dont on précisera le vecteur.
   b) en déduire la forme réduite de l'isométrie $\varphi = r o S_{(AB)}$
5. caractériser l'isométrie $r_{\left(A,\frac{\pi}{2}\right)} o S_{(AB)}$

EXERCICE 5 :

Soit ABC un triangle équilatéral direct et (ξ) le cercle circonscrit à ce cercle. La médiatrice de [BC] coupe (ξ) en A et D. on note A' le point d'intersection des droites (BD) et (AC).

1. Montrer que $A' = S_C(A)$
2. Soit $f = S_{(BD)} o S_{(DC)}$ et $g = S_{(CA)} o S_{(AB)}$. Caractériser les applications f, g et $f o g$.
3. Soit $E = S_{(AC)}(B)$. On pose $h = S_{(CA)} o S_{(CA)} o S_{(AB)}$
   a. Déterminer $h(B)$.
   b. Montrer que h est une symétrie glissante et donner sa forme réduite.

EXERCICE 6 :

Dans le plan orienté, on considère un losange ABCD de centre O tel que $\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}}\right) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$. On désigne par I,J et K les milieux respectifs des segments [BC],[BC] et [AD].

1. a) identifier les isométries $R = S_{(DC)} o S_{(DJ)}$ et $T = S_{(OJ)} o S_{(DC)}$
   b) Montrer que l'isométrie $f = T o R$ est une rotation dont on précisera le centre et l'angle
2. soit M un point de segment [AB] et N un point de segment [BC] tel que $AM = BN$ et Q le point tel que IDNQ est un parallélogramme
   a) préciser R(M), en déduire que $f(M) = Q$

b) donner la nature du triangle JMQ

3. soit g l'isométrie du plan tel que $g(A)=D$, $g(B)=C$ et $g(D)=B$
   a) Montrer que g est un antidéplacement
   b) Montrer que $g(O)=J$ et $g(K)=O$ puis identifier $t_{\overrightarrow{JO}}\circ g$.
   c) en déduire que g est une symétrie dont on précisera l'axe et le vecteur
4. on note $h=R^{-1}og$ et $S_{(AD)}R^{-1}og$. Déterminer $h(B)$ et $h(K)$ puis identifier h et g.

EXERCICE 7 :

Dans le plan orienté, on considère un carré ABCD de centre O tel que $\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$.

On désigne par I le milieu du segment [AB] et Δ la droite perpendiculaire à (BD) passant par le point D

1. soit $f=S_{(BD)}\circ S_{(OI)}\circ t_{\overrightarrow{AB}}$.
   a) caractériser l'application $S_{(OI)}oS_{(AD)}$.
   b) en déduire que f est une rotation dont on précisera le centre et une mesure de son angle.
2. soit R la rotation de centre D et d'angle dont une mesure est $\frac{\pi}{2}$ et $g=RoS_{(DC)}$.

   Caractériser $S_{(BD)}oS_{\Delta}$ puis caractériser g.
3. a) soit l'isométrie $h=t_{2\overrightarrow{AB}}\circ S_{\Delta}$, caractériser $hoS_{(AC)}$.
   c) en déduire que h est une symétrie glissante dont on précisera l'axe et le vecteur
4. soit φ une isométrie qui laisse globalement invariant le triangle ABD.
   a) Montrer que $\varphi([BD])=[BD]$
   b) En déduire que φ fixe aux moins deux points que l'on précisera
   c) Déterminer alors toutes les isométries qui laissent globalement invariant le triangle ABD

EXERCICE 8 :

ABC un triangle rectangle et isocèle en A tel que $\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$. Soit I le milieu de [BC] et J celui de [AB] . Soit R_1, R_2 et R_3 les rotations d'angle $\frac{\pi}{3}$ et de centre respectifs I, A et C.

1. Caractériser $S_{(IA)}oS_{(AB)}$
2. Déterminer $R_1(A)$. En déduire la droite Δ telle que $R_1=S_{\Delta}oS_{(IA)}$
3. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de $f=R_1oR_2$
4. Déterminer $R_3oR_2(B)$. Caractériser R_3oR_2
5. Soit (ξ) et (ξ') les cercles passant par A et de centres respectifs B et C. A tout point M de (ξ) on associe le point le point M' de (ξ') tel que $\left(\widehat{\overrightarrow{BM},\overrightarrow{CM'}}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$.
   a) Montrer que la médiatrice de [MM'] passe par un point fixe que l'on précisera
   b) Soit $N=R_3(M')$. Montrer que M et N sont symétriques par rapport à I .

EXERCICE 9 :

ABCD étant un carré direct de centre *O*.

cssmas@gmail.com
www.masmaths.net

1) Caractériser l'application f dans chacun des cas suivants :

a) $f = S_{(BC)} o S_{(OC)}$ b) $f = R_{\left(O; -\frac{\pi}{2}\right)} o R_{\left(C; \frac{\pi}{2}\right)}$ c) $f = R_{\left(A; \frac{\pi}{2}\right)} o t_{\overrightarrow{CB}}$ d) $f = S_{(BD)} o S_{(OC)} o t_{\overrightarrow{BD}}$

2) On construit à l'extérieur du carré $ABCD$ les deux triangles équilatéraux ADF et ABE.

a) Montrer qu'il existe une rotation unique r telle que $r(A) = D$ et $r(E) = C$.

b) En déduire que FEC est un triangle équilatéral direct.

3) Caractériser par deux méthodes l'application $g = R_{\left(B; -\frac{\pi}{2}\right)} o R_{\left(A; \frac{\pi}{2}\right)}$.

EXERCICE 10 :

Le plan complexe étant rapporté à un R.O.N.D $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On note A et B les points d'affixes respectives $z_A = e^{-i\frac{\pi}{6}}$ et $z_B = \frac{i}{2}$.

1) Soient $A_1 = R_{(O,\frac{\pi}{2})}(A)$; $A_2 = t_{-\vec{u}}(A_1)$ et $A_3 = S_B(A)$. Déterminer les affixes des points A_1, A_2 et A_3.
2) Soit l'équation (E) : $z^2 - (d+1)(i-1)z - i(1+d^2) = 0$ où d est un paramètre complexe.
   a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E).
   b) On considère les points M, M' et M'' d'affixes respectives d, $id-1$ et $i-d$. Déterminer les ensembles des points M' et M'' dans chacun des cas suivants :

   * $\operatorname{Arg}(id) \equiv \frac{\pi}{3} \quad [2\pi]$.

   * $\left|2d - \sqrt{3} + i\right| = 2$.

EXERCICE 11 :

Dans le plan complexe rapporté à un R.O.N.D $(O,\vec{u},\vec{v})$ on considère l'application f qui à tout point $M(z)$ associe le point $M'(z')$ tel que $z' = i\,\overline{z} + 1 - i$.

1) Montrer que f est une isométrie.
2) Déterminer l'ensemble des points invariants par f. Caractériser alors f.
3) Soit t la translation de vecteur $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$. Montrer que tof est une symétrie glissante que l'on caractérisera.
4) Soit R la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$. Caractériser les transformations : toR et foR.