LPBT	Isométries	Mr Masmoudi
4ème Maths		Exercices

Isométries

Exercice 1 :

Dans le plan orienté, ABI est un triangle équilatéral tel que $(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AI}}) \equiv \frac{\pi}{3}(2\pi)$ et w le symétrique de B par rapport à (AI).

A/ *soit r la rotation d'angle $\frac{\pi}{3}$ qui envoie A en I.*

1/ montrer que w est le centre de r.
2/ soit C=r(B) ; montrer que I est le milieu de [AC].
3/ a tout point M de [AB] distinct de A et B, on associe le point M' de [IC] tel que AM=IM' ; montrer que wMM' est équilatéral.

B/ *on désigne par O le milieu de [AI], K le milieu de [BC] et H le milieu de [wC].*

1/ montrer qu'il existe un unique antidéplacement φ tel que $\varphi(A)=I$ et $\varphi(B)=C$.
2/ construire $I'=\varphi(I)$. (justifier)
3/ montrer que φ n'a pas de points fixes.
4/ soit $S_\Delta o t_{\vec{u}}$ la forme réduite de φ.
a/ vérifier que Δ est la médiatrice de [BH].
b/ déterminer $t_{\vec{u}}(H)$; donner la forme réduite de φ.
5/ soit $g=\varphi o S_{(BI)}$. Donner la nature de g puis caractériser g.

Exercice 2 :

on considère dans le plan orienté un rectangle ABCD de centre O tel que AB=2AD et $(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}}) = \frac{\pi}{2}[2\pi]$; on désigne par I le milieu de [AB] et J le milieu de [CD].

1/ montrer qu'il existe un unique déplacement f tel que f(A)=C et f(I)=J ; quel est son angle ? Caractériser f puis en déduire que f(B)=D.
2/ déterminer la droite δ telle que $f= S_{(IJ)}oS_\delta$.
3/ soit $r=r_{(I,\pi/2)}$.
a) déterminer r(B), r(C) , r(J).
b) soit M un point de [CJ] , la perpendiculaire à (IM) issue de I coupe la perpendiculaire à (BM) issue de J en M' ; quel est l'ensemble des points M' lorsque M décrit [CJ].
4/ on pose g=rof.
a) montrer que g est une rotation dont on précisera l'angle .
b) déterminer g(A).
c) déduire la construction du centre de g.
5/ a) montrer qu'il existe un unique antidéplacement h tel que h(A)=C et h(I)=J.
b) montrer que h est une symétrie glissante .
c) montrer que h(B)=D.
6/ a) déterminer $hoS_{(AB)}(A)$ et $hoS_{(AB)}(B)$; en déduire que $hoS_{(AB)}=f$.
b) déterminer les éléments caractéristiques de h.

Exercice 3:

dans un plan orienté on considère un carré ABCD de centre I tel que $(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}}) = \frac{\pi}{2}[2\pi]$, soit J le milieu de [AD] , K le milieu [CD] et E le point du plan tel que DBE est équilatéral direct.

1/ a) on pose $\psi = t_{\overrightarrow{BC}} o S_{(AC)}$, déterminer $\psi(A)$ et $\psi(D)$.

b) déduire que ψ est une symétrie glissante et la caractériser.

2/a) montrer qu'il existe un unique déplacement r tel que r(B)=A et r(A)=D.

b) caractériser r.

3/ soit l'application g= $r_{(B,\pi/6)} o r_{(E,\pi/3)}$, déterminer la nature et les éléments caractéristiques de g.

4/ soit $f = r_{(I,\pi/2)}$, on pose $t = g o f^{-1}$.

a) déterminer t(A).

b) caractériser t.

5/ soit M un point du plan on pose $M_1=f(M)$ et $M_2=g(M)$. (M n'appartient pas à (AD)).

a) quelle est la nature du quadrilatère ABM_2M_1.

b) montrer qu'il existe un unique antidéplacement φ tel que $\varphi(A)=M_1$ et $\varphi(D)=M_2$.

c) comparer φ et $t_{\overrightarrow{AM_1}} o S_{(AI)}$.

d) en déduire la nature et les éléments caractéristique de φ dans chacun des cas suivants :

- $M \in (BD) \setminus \{D\}$
- M appartient à la parallèle à (AC) passant par D. privée de D.

6/ soit Δ une droite variable passante par A et distinct de (AC) ; on désigne par B' et D' les projetés orthogonaux de B et D sur Δ.

a) soit Δ' la perpendiculaire à Δ passant par D, déterminer les images par f de Δ et Δ'.

b) en déduire l'image de D' par f.

c) montrer que le cercle de diamètre [D'B'] passe par un point fixe lorsque Δ varie.

Exercice 4:

soit OAB un triangle isocèle en O tel que $(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}}) \equiv \frac{\pi}{6}[2\pi]$ et ζ le cercle de centre O et passant par A. on désigne par C le symétrique de A par rapport à (OB) ; B' et A' les symétriques respectives de B et C par rapport à O et D le point d'intersection de (AB) et (A'B').

1/a) montrer que AB=A'B'.

b) en déduire qu'il existe un unique déplacement φ tel que $\varphi(A)=A'$ et $\varphi(B)=B'$.

c) caractériser φ.

2/ soit $f=S_{(BB')}oS_{(AA')}$.

a) déterminer la nature et les éléments caractéristiques de f.

b) placer le point $C'=f(A')$ et montrer que $C'\in\zeta$.

Les droites (OB) et (A'C') se coupent en I.

c) soit $O'=S_{(AA')}(O)$; quelle est la nature du quadrilatère OO'A'C'.

soit J son centre.

d) en déduire que $O'\in\zeta$.

3/ a) montrer que $A'O=A'C'$.

b) en déduire qu'il existe un unique antidéplacement ψ tel que $\psi(C')=A'$ et $\psi(A')=O$.

c) déterminer $\psi(I)$.

d) caractériser ψ

Exercice 5 :

ABCD est un carré de centre O, tel que $(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}})\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$, on note I le milieu de [CD] , K le symétrique de O par rapport à D et L le symétrique de O par rapport à (BC).

I/ 1/ montrer qu'il existe un unique déplacement f tel que $f(B)=D$ et $f(L)=K$.

2/ donner la nature et les éléments caractéristiques de f.

3/ en déduire la nature du triangle AKL puis du triangle AIL.

4/ soit ζ le cercle de diamètre [AL].

a) construire le cercle ζ' image de ζ par f

b) une droite Δ passant par I coupe ζ en N et ζ' en N'.

montrer que $f(N)=N'$.

II/ soit $g=S_{(BC)}oS_D$

1/ déterminer $g(K)$ puis montrer que g n'est pas une symétrie orthogonale.

2/ donner la forme réduite de g.

3/ soit $r=goS_{(BD)}$

a) montrer que $r(K)=L$

b) montrer que r est une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ et construire son centre Ω.

Exercice 6:

Dans le plan orienté, on considère un triangle ABC de sens direct et construit à l'extérieur de ce triangle les carrés ABDE et ACFG de centres respectifs I et J et le parallélogramme AGKE de centre I'.

Soient J' le milieu de [BC] et H le projeté orthogonal de A sur (BC).

1/a) montrer qu'il existe un déplacement unique f que l'on caractérisera tel que $f(C)=A$ et $f(A)=G$.

b) déterminer $f(B)$ puis montrer que $FB=CK$ et donner une mesure de $(\widehat{\overrightarrow{FB},\overrightarrow{CK}})$.

2/ soit $g=S_{I'}\, o\, f$.

a) déterminer la nature et les éléments caractéristiques de g.

b) montrer que $DC=BK$.

3/ montrer que (AK), (DC) et (FB) sont concourantes.

4/ a) montrer qu'il existe un unique antidéplacement f' que l'on caractérisera tel que $f'(A)=B$ et $f'(E)=D$.

b) déterminer la nature et les éléments caractéristiques de $g'= t_{\overrightarrow{AD}}\, o f'$ (donner la forme réduite de g')

Exercice 7:

Dans le plan orienté P, on considère un triangle isocèle ABC tel que $AB=AC$ et $(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}) \equiv \frac{\pi}{4}\,[2\pi]$. Soit D le point du plan tel que le triangle CDA soit rectangle isocèle et $(\widehat{\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CD}}) \equiv \frac{-\pi}{2}\,[2\pi]$.

1/ soit R_A la rotation de centre A et transformant B en C et R_C la rotation de centre C et d'angle $\frac{-\pi}{2}$. on pose $f= R_C\, o R_A$.

a) déterminer $f(A)$ et $f(B)$.

b) démontrer que f est une rotation dont on précisera l'angle et le centre noté O. placer O.

c) quelle est la nature du quadrilatère ABOC.

2/ on note $g= f\, o S_{(BC)}$.

a) quelle est la nature de l'application g.

b) déterminer $g(A)$ et $g(B)$.

3/ on note H le milieu de $[BC]$, $C'=g(C)$ et $H'=g(H)$.

a) montrer que H' est le milieu de $[OD]$

b) construire H'puis C'.

c) donner la forme réduite de g.