Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par: $f(x)=\dfrac{e^x}{e^x+1}$ et C_f la courbe de f dans un repère orthonormé $\mathcal{R}=(O,\vec{i},\vec{j})$ (unité 2 cm).

A) 1°) a) Dresser le tableau de variations de f.

b) Montrer que le point $A(0,\dfrac{1}{2})$ est un centre de symétrie de C_f.

c) Montrer que la tangente T à C_f en A a pour équation $y=\dfrac{1}{4}x+\dfrac{1}{2}$.

2°) On pose pour tout $x\in\mathbb{R}$, $\varphi(x)=f(x)-x$.

a) Dresser le tableau de variations de φ.

b) En déduire que l'équation $f(x)=x$ admet dans $\mathbb{R}$ une solution unique α et que $\dfrac{1}{2}<\alpha<\text{Log}2$.

c) Etudier la position de C_f par rapport à la droite Δ: $y=x$.

d) Tracer C_f et T et Δ.

3°) Soit m un réel strictement positif.

a) Calculer en cm^2 la mesure de l'aire $\mathcal{A}(m)$ de la partie du plan limitée par la courbe C_f et les droites d'équations respectives $y=1$, $x=0$ et $x=m$.

b) Calculer $\lim\limits_{m\to+\infty}\mathcal{A}(m)$

B) 1°) a) Montrer que f réalise une bijection de IR sur un intervalle J à préciser.

b) Soit g la fonction réciproque de f. Expliciter g(x) pour $x\in J$. Calculer $g(\dfrac{1}{2})$ et $g(\dfrac{3}{4})$.

c) Tracer la courbe C_g de g dans le même repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.

2°) a) Calculer l'intégrale $I(\alpha)=\int_0^{\alpha}(f(x)-x)dx$

b) En déduire l'aire en cm^2 de la partie du plan limitée par les deux courbes C_f et C_g et les deux axes de coordonnées.

3°) a) Montrer que g est dérivable sur $]0,1[$ et que $g'(x)=\dfrac{1}{x-x^2}$.

b) Dériver $\dfrac{1}{x-1}$ puis calculer à l'aide d'une intégration par parties l'intégrale $K=\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{4}}\dfrac{\text{Log}x}{(x-1)^2}dx$

C) 1°) Soit la suite $(U_n)_{n\in IN}$ définie par: $\begin{cases}U_0=\dfrac{1}{2}\\ U_{n+1}=f(U_n)\text{ pour tout entier n}\end{cases}$

a) Montrer que $\forall n\in IN$, $\dfrac{1}{2}\le U_n\le\alpha$

b) Montrer que (U_n) est croissante.

c) En déduire que la suite (U_n) est convergente et calculer sa limite.

2°) On pose $I_n=\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{4}}(x-\dfrac{1}{2})^{n+1}.g(x)dx$, $n\in\mathbb{N}$.

a) Montrer que la suite (I_n) est décroissante.

b) Vérifier que $\forall n\in\mathbb{N}$, $I_n\ge0$. En déduire que (I_n) est convergente

c) Montrer que $\forall n\in\mathbb{N}$, $0\le I_n\le\dfrac{\text{Log}3}{(n+2)4^{n+2}}$ puis calculer $\lim\limits_{n\to+\infty}I_n$.

موقع مراجعة باكالوريا
BAC.MOURAJAA.COM
bac Math

Problème :

A/1°) a) f déf cont dér sur $\mathbb{R}$, $\lim\limits_{-\infty} f = \lim \frac{e^x}{1+e^x} = \frac{0}{0+1} = 0$

$\lim\limits_{+\infty} f = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{e^{-x}+1} = \frac{1}{0+1} = 1$

$f'(x) = \frac{e^x}{(1+e^x)^2} > 0$

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	1

b) $\forall x \in D_f=\mathbb{R}$; $-x \in D_f = \mathbb{R}$ et $f(2x_0-x) + f(x) = \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}} + \frac{e^x}{1+e^x} = \frac{1}{e^x+1} + \frac{e^x}{e^x+1} = 1 = 2b$

donc A est un centre de symétrie de C_f .

c) $f'(0) = \frac{1}{4}$ et $f(0) = \frac{1}{2}$ $\Rightarrow$ $T_A : y = \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}$

2°/ a) φ déf sur $\mathbb{R}$ et $\varphi'(x) = f'(x) - 1 = \frac{e^x}{(e^x+1)^2} - 1 = \frac{e^x - (1+e^x)^2}{(e^x+1)^2}$

$\varphi'(x) = \frac{-e^{2x} - e^x - 1}{(e^x+1)^2} < 0$

$\lim\limits_{-\infty} \varphi = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) - x = +\infty$

$\lim\limits_{+\infty} \varphi = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - x = -\infty$

x	$-\infty$		$+\infty$
$\varphi'(x)$		$-$	
$\varphi(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-\infty$

φ cont str $\searrow$ sur $\mathbb{R}$ donc φ est bij de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$

b) d'après a) (TV de φ) φ cont str $\searrow$ sur $\mathbb{R}$ qui contient 0 $\Rightarrow$ $\varphi(x) = 0$ (ou $f(x) = x$) admet dans $\mathbb{R}$ une solution unique.

$\varphi\left(\frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2} = 0,12 > 0$

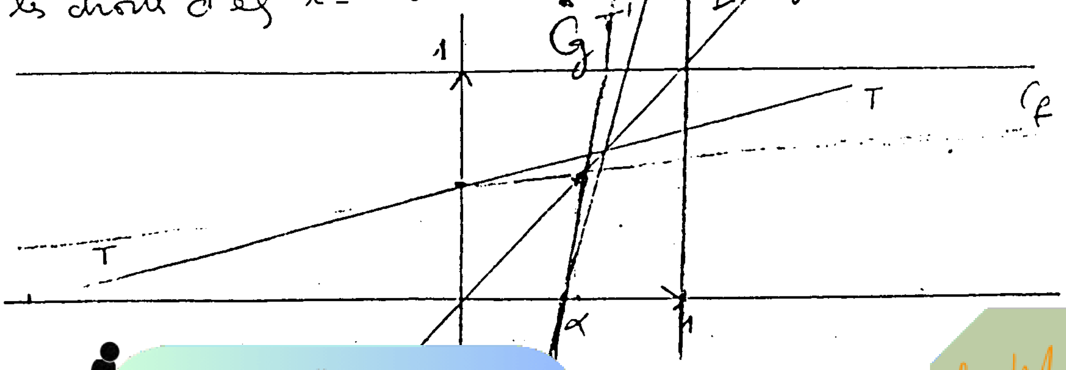
$\varphi(\log 2) = \frac{2}{3} - \log 2 \simeq -0,026 < 0$

$\Rightarrow \varphi\left(\frac{1}{2}\right)\cdot\varphi(\log 2) < 0 \Rightarrow \frac{1}{2} < \alpha < \log 2$

c)

		α	
$\varphi(x)$		$\searrow$ 0	
$\varphi(x) = f(x) - x$	$+$	0	$-$
C_f /. Δ	au dessus	point commun (α,α)	au dessous

d) les droites d'éq $x = 0$ et $x = 1$ sont des asymptotes de C_f



math-
موقع مراجعة باكالوريا
BAC.MOURAJAA.COM
bac Math

3°) a) $\mathcal{A}(m) = \int_0^m [1 - f(x)]\,dx = \int_0^m \left[1 - \frac{e^x}{1+e^x}\right] dx$

$= \left[x - \log|1+e^x|\right]_0^m = m - \log(1+e^m) + \log 2$ (u.a)

$\mathcal{A}(m) = 4m - 4\log(1+e^m) + 4\log 2 \quad cm^2$.

b) $\lim\limits_{m\to+\infty} \mathcal{A}(m) = \lim\limits_{m\to+\infty} 4m - 4\log e^m(e^{-m}+1) + 4\log 2$

$= \lim\limits_{m\to+\infty} 4m - 4\log e^m - 4\log(e^{-m}+1) + 4\log 2$

$= \lim\limits_{m\to+\infty} -4\log(e^{-m}+1) + 4\log 2 = 4\log 2 \quad cm^2$.

B) 1°) a) d'après A) 1°) a) f cont st $\nearrow$ sur $\mathbb{R} \Rightarrow f$ bij. de $\mathbb{R}$ sur $J = f(\mathbb{R}) =]0,1[$ (TV de f).

b) $\begin{cases} g(x) = y \\ x \in]0,1[\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(y) = x \\ y \in \mathbb{R} \end{cases}$

$f(y) = x = \frac{e^y}{e^y+1} \Leftrightarrow e^y = e^y x + x$

$\Leftrightarrow e^y(1-x) = x \Leftrightarrow e^y = \frac{x}{1-x}$

$\Leftrightarrow y = \log\frac{x}{1-x}$ donc $\boxed{g(x) = \log\frac{x}{1-x}}$

$g\left(\frac{1}{2}\right) = \log 1 = 0$, $g\left(\frac{3}{4}\right) = \log 3$.

c) $\mathcal{C}_g = S_\Delta\,(\mathcal{C}_f)$.

2°) a) $I(\alpha) = \int_0^\alpha [f(x) - x]\,dx = \int_0^\alpha \left[\frac{e^x}{1+e^x} - x\right] dx$

$= \left[\log|1+e^x| - \frac{1}{2}x^2\right]_0^\alpha$

$I(\alpha) = \log(1+e^\alpha) - \frac{1}{2}\alpha^2 - \log 2$

موقع مراجعة باكالوريا
BAC.MOURAJAA.COM
.blogspot.com
bac Math

b) d'après la symétrie par rapport à Δ, $I(\alpha)$ est la moitié de l'aire demandée alors

$\mathcal{A}(\alpha) = 2I(\alpha)$ u.a $= 8\, I(\alpha)$ cm^2

$\mathcal{A}(\alpha) = 8\,\mathrm{Log}(1+e^{\alpha}) - 4\alpha^2 - 8\,\mathrm{Log}\,2$ cm^2.

3°/a) $\left\{\begin{array}{l} f \text{ dérivable sur } \mathbb{R} \\ f'(x) \neq 0 \text{ sur } \mathbb{R} \end{array}\right\} \Rightarrow g$ dérivable sur J. $\left(\begin{array}{l}\text{ou d'après} \\ g(x) = \mathrm{Log}\,\frac{x}{1-x}\end{array}\right)$

$$g'(x) = \frac{\left(\frac{x}{1-x}\right)'}{\frac{x}{1-x}} = \frac{\frac{1}{(1-x)^2}}{\frac{x}{1-x}} = \frac{1}{x(1-x)} = \boxed{\frac{1}{x-x^2}}$$

b) $\left(\frac{1}{x-1}\right)' = \frac{-1}{(x-1)^2}$, $K = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{4}} \frac{\mathrm{Log}\,x}{(x-1)^2}\,dx$

$\left\{\begin{array}{l} u = \mathrm{Log}\,x \\ v' = \frac{1}{(x-1)^2} \end{array}\right.$ $\left\{\begin{array}{l} u' = \frac{1}{x} \\ v = \frac{-1}{x-1} \end{array}\right.$

$$K = \left[\frac{\mathrm{Log}\,x}{1-x}\right]_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{4}} \cancel{+} - \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{4}} g'(x)\,dx$$

$$= \frac{\mathrm{Log}\,\frac{3}{4}}{\frac{1}{4}} - \frac{\mathrm{Log}\,\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} - \left[g(x)\right]_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{4}}$$

$$= 4\,\mathrm{Log}\,3 - 8\,\mathrm{Log}\,2 + 2\,\mathrm{Log}\,2 - g\left(\tfrac{3}{4}\right) + g\left(\tfrac{1}{2}\right)$$

$$= 4\,\mathrm{Log}\,3 - 6\,\mathrm{Log}\,2 - \mathrm{Log}\,3$$

$$\boxed{K = 3\,\mathrm{Log}\,3 - 6\,\mathrm{Log}\,2}$$

C/1°) a) $n = 0$: $\frac{1}{2} \leqslant U_0 = \frac{1}{2} \leqslant \alpha$ vrai

Supposons que $\frac{1}{2} \leqslant U_p \leqslant \alpha$ pour $p \in \mathbb{N}$

f est $\nearrow$ sur $\mathbb{R}$ $\Rightarrow$

$\frac{1}{2} \leqslant f\left(\frac{1}{2}\right) \simeq 0{,}62 \leqslant f(U_p) = U_{p+1} \leqslant f(\alpha) = \alpha$ vrai

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{2} \leqslant U_n \leqslant \alpha$.

موقع مراجعة باكالوريا
BAC.MOURAJAA.COM
bac Math

b) d'après ...

$\Rightarrow f(x) \geq x$ sur $]-\infty, \alpha]$

or $U_n \leq \alpha \Rightarrow f(U_n) \geq U_n \Rightarrow U_{n+1} \geq U_n$

donc (U_n) est croissante.

c) d'après a) et b) (U_n) est croissante et majorée par α donc convergente. Soit $l = \lim_{n\to+\infty} U_n$.

on a : $\left.\begin{array}{l} U_{n+1} = f(U_n) \\ U_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l \\ f \text{ cont sur } \mathbb{R} \text{ donc en } l \end{array}\right\} \Rightarrow f(l) = l$ et d'après A) 2°/ b) $l = \alpha \Rightarrow$ $\boxed{\lim_{n\to+\infty} U_n = \alpha}$

2°) $I_n = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{4}} (x - \frac{1}{2})^{n+1} g(x)\, dx$.

a) $I_{n+1} - I_n = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{4}} (x-\frac{1}{2})^{n+1}(x - \frac{3}{2})\, g(x)\, dx$

$\left.\begin{array}{l} \frac{1}{2} \leq x \leq \frac{3}{4} \Rightarrow 0 \leq x - \frac{1}{2} \leq \frac{1}{4} \\ -1 \leq x - \frac{3}{2} \leq -\frac{3}{4} \\ g(\frac{1}{2}) = 0 \leq g(x) \leq g(\frac{3}{4}) \end{array}\right\} \Rightarrow (x-\frac{1}{2})^{n+1}(x-\frac{3}{2})g(x) \leq$

$\Rightarrow I_{n+1} - I_n \leq 0 \Rightarrow$ (I_n) décroissante.

b) d'après a) $(x-\frac{1}{2})^{n+1} g(x) \geq 0 \Rightarrow I_n \geq 0$

Alors (I_n) est décroissante minorée par 0 donc convergente.

c) $0 = g(\frac{1}{2}) \leq g(x) \leq g(\frac{3}{4}) = \log 3$ car g est croissante sur ...

$0 \leq (x-\frac{1}{2})^{n+1} g(x) \leq (x-\frac{1}{2})^{n+1} \log 3$ cont

$0 \leq \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{4}} (x-\frac{1}{2})^{n+1} g(x)\, dx \leq \int_{\frac{1}{2}}^{3/4} \log 3 \cdot (x-\frac{1}{2})^{n+1} dx$

$0 \leq I_n \leq \frac{\log 3}{n+2} \left[(x-\frac{1}{2})^{n+2}\right]_{\frac{1}{2}}^{3/4} = \frac{\log 3}{(n+2) \cdot 4^{n+2}}$

or $4 > 1 \Rightarrow \lim (n+2) \cdot 4^{n+2} = +\infty \Rightarrow$

$\lim \frac{\log 3}{\ldots}$ ... donc $\lim_{n\to+\infty} I_n$ ...

موقع مراجعة باكالوريا
BAC.MOURAJAA.COM
math-pilote.b...
bac Math