# FEUILLE DE REVISION 5

## Exercice .1

Dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes on considère l'équation (E) :

$$z^2 + (-5+4i)z - 3 - 15i = 0.$$

1. a) Montrer que l'équation (E) admet une solution imaginaire pur à déterminer.
   b) Déterminer alors la deuxième solution.
2. Dans le plans complexe muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on donne les points $A$, $B$, $C$ et $D$ d'affixes respectives $z_A = -3i$, $z_B = 5 - i$, $z_C = iz_A$ et $z_D = iz_B$.
   a) Placer les points $A$, $B$, $C$ et $D$.
   b) Montres que les triangles $OAC$ et $OBD$ sont rectangles et isocèles.
   c) Soit $M$ un point de la droite $(AB)$ d'affixe $z_M$.
      i) Montrer qu'il existe un réel $k$ tel que : $z_M = 5k + (2k-3)i$.
      ii) Montrer que les droites $(OM)$ et $(CD)$ sont perpendiculaires si et seulement si $M$ est le milieu de $[AB]$. Vérifier que dans ce cas $CD = 2OM$

## Exercice .2

1. Soit $n$ un entier naturel.
   a) Montrer que si $n \equiv 5[7]$ alors $n^3 + 1 \equiv 0[7]$ et que si $n \equiv 2[7]$ alors $n^3 - 1 \equiv 0[7]$.
   b) En déduire que le nombre $2007^{2007} + 2011^{2013}$ est divisible par 7.
2. a) Déterminer suivant l'entier naturel $n$ les restes dans la division Euclidienne par 7 de $5^n$ et de $2^n$.
   b) En déduire les entiers naturels $n$ tels que $19^n + 23^n \equiv 0[7]$.
3. On considère dans $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ l'équation $(E) : 3x^2 + 7y^2 = 10^{2n}$.
   a) Déterminer le reste dans la division Euclidienne par 7 de 100.
   b) En déduire que si $(x, y)$ est une solution de $(E)$ alors $3x^2 \equiv 2^n[7]$.
   c) En déduire que l'équation $(E)$ n'admet pas de solution.

## Exercice .3

Soit $\alpha$ un réel positif. Soit $u$ la suite définie sur $\mathbb{N}$ par :$u_0 = \frac{3}{2}\alpha$ et $u_{n+1} = \dfrac{(\alpha-1)u_n - 2\alpha^2}{u_n - 1 - 2\alpha}$.

1. a) Montrer que pour tout entier naturel $n$, on a : $\alpha < u_n < 2\alpha$.
   b) Montrer que $(u_n)$ est décroissante.
   c) En déduire que $(u_n)$ est convergente et calculer sa limite.
2. Soit la suite $v$ définie sur $\mathbb{N}$ par : $v_n = \dfrac{u_n - \alpha}{\ldots}$.

ⓐ Montrer que $(v_n)$ est est une suite géométrique. Caractériser la.

ⓑ Déduire $v_n$ puis $u_n$ en fonction de $n$.

ⓒ Retrouver $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

3. On donne la suite $w$ définie sur $\mathbb{N}$ par : $w_0 = 3$ et $w_n = \dfrac{w_n - 8}{w_n - 5}$.
Donner le terme général de $(w_n)$. puis calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n$.

## Exercice .4

**-A-** Soit la fonction $g$ définie sur $]0, +\infty[$ par $g(x) = \dfrac{1}{x} - \ln x$.

1. Dresser le tableau de variation de $g$.
2. ⓐ Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une seul solution $\alpha > 0$ et que $1,7 < \alpha < 1,8$.

   ⓑ Vérifier que $\ln\alpha = \dfrac{1}{\alpha}$.

   ⓒ Donner le tableau de signe de $g(x)$.

**-B-** Soit la sonction $f$ définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = e^{2-x}.\ln x$.

1. Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ Interpréter graphiquement ce résultat.
2. Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$. Interpréter graphiquement ce résultat.
3. ⓐ Montrer que $f$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ et que $f'(x) = e^{2-x}.g(x)$ pour tout $x \in ]0, +\infty[$.

   ⓑ Dresser le tableau de variation de $f$.
4. Vérifier que $\ln(f(\alpha)) = 2 - \alpha - \ln(\alpha)$.
5. On a tracé dans la figure de la page annexe la courbe $\Gamma$ de la fonction $\ln$ et on a placé le point d'abscisse le réel $\alpha$.

   ⓐ En utilisant la courbe $\Gamma$, placer sur l'axe des ordonnées le réel $\ln(\alpha)$ puis le réel $2 - \alpha - \ln(\alpha)$.

   ⓑ En utilisant encore la courbe $\Gamma$, placer sur l'axe des abscisses puis sur l'axes des ordonnées le réel $f(\alpha)$.

   ⓒ Construire alors le point $A(\alpha, f(\alpha))$ puis tracer la courbe $\mathscr{C}_f$.

### Annexe