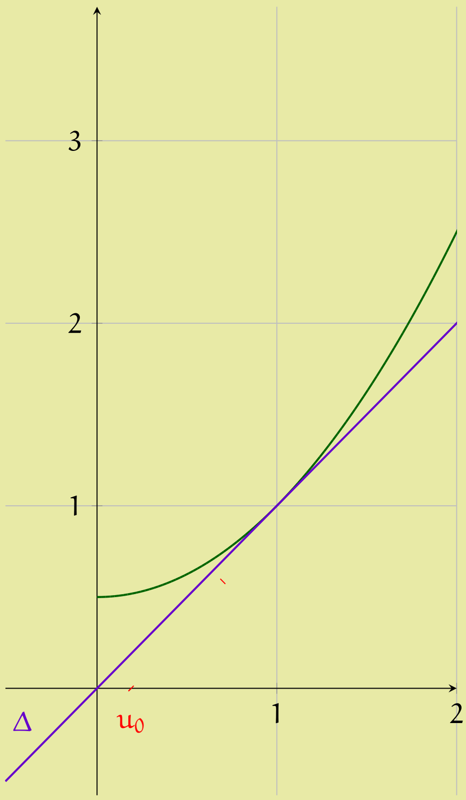
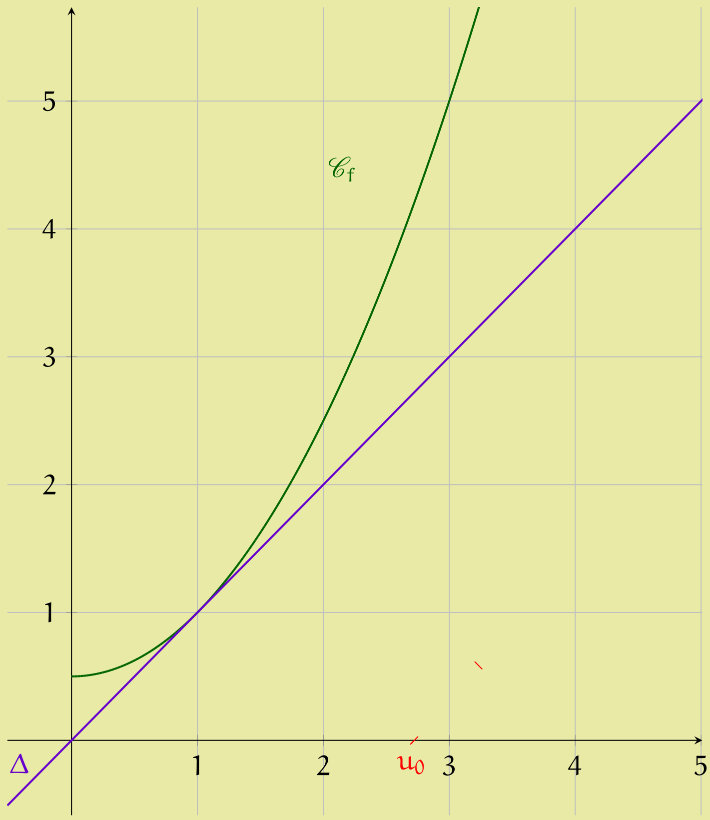
FEUILLE DE REVISION 6

Exercice .1

On considère la suite (u_n) définie par son $u_0 > 0$ et pour tout entier n, $u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(1 + u_n^2\right)$.

1. On a tracer deux fois la courbe de la fonction f définie sur $[0, +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{2}\left(1 + x^2\right)$ et la droite $\Delta : y = x$.
   -Pour la première courbe on prend $0 < u_0 < 1$.
   -Pour la deuxième courbe on prend $u_0 > 1$.
   a) Construire graphiquement les images des premiers termes de la suite u.
   b) Que peut on suggèrer à propos de la convergence de la suite (u_n) ?





2. On suppose que l'on a : $u_0 = 1$. Montrer que (u_n) est constante.
3. a) On suppose que $0 < u_0 < 1$.
   b) Montrer que u est croissante et majotée par 1.
   c) Déduire que la suite (u_n) est convergente et calculer sa limite.
4. On suppose que l'on a : $u_0 > 1$.
   a) La suite u est-elle croissante ?
   b) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n on : $u_n \geq 2 \times \left(\frac{u_0}{2}\right)^{2^n}$.
   c) Pour $u_0 > 2$, déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

Exercice .2

Dans le plan complexe rapporté d'un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$ on associe à tout point M d'affixe $z \neq 4$, le point M' d'affixe z' tel que $z' = \dfrac{z-4}{4-\bar{z}}$. On donne le point A d'affixe 4.

1. Soit B le point d'affixe $1+3i$. Déterminer sous sa forme algébrique l'affixe du point B' associé au point B.
2. Déterminer l'ensemble des points $M(z)$ tel que $z' = 1$.
3.
   - a) Montrer que le point $M'(z')$ appartient au cercle de centre O et de rayon 1.
   - b) Soit I le point d'affixe 1. Calculer $(z'-1) \times (\overline{z-4})$, en déduire que les deux vecteurs $\overrightarrow{IM'}$ et $\overrightarrow{AM}$ sont colinéaires.
   - c) Déduire une construction géométrique du point C' associé au point C d'affixe $2+i$.

Exercice .3

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On donne le tableau de variation de la fonction g définie sur $]0, +\infty[$ par $g(x) = \ln x + 2x^2 - 3$.

x	0	α	$+\infty$
g	$-\infty$ ↗	0 ↗	$+\infty$

1. Donner le signe de $g(x)$.
2. Soit la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{2}{x} - \dfrac{\ln x}{x} + 2x - 5$. On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative.
   - a) Déterminer les limites éventuelles de f et interpréter graphiquement les résultats trouvés. (Remarquer que la droite $\Delta : y = 2x - 5$ est une asymptote oblique pour $\mathscr{C}$ au voisinage de $+\infty$).
   - b) Montrer que f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et que pour tout $x > 0$, $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$.
   - c) Construire Δ et $\mathscr{C}$ dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
3. Soit la fonction h définie sur $]0, +\infty[$ par $h(x) = (\ln x)^2$.
   - a) Vérifier que pour tout $x > 0$ on a : $f(x) = \dfrac{2}{x} - \dfrac{1}{2}h'(x) + 2x - 5$.
   - b) Interpréter graphiquement le réel : $\displaystyle\int_e^{e^2} f(t)\,dt$ et donner sa valeur.

Exercice .4

1.
   - a) Montrer que pour tout entier n, les entiers $14n+3$ et $5n+1$ sont premiers entre eux.
   - b) En déduire deux entiers u et v tels que $31u - 11v = 1$.
2. Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation $E : 31x - 11y = 3$.
3. On considère dans $\mathbb{Z}$ le système $S : \begin{cases} x \equiv 2[31] \\ x \equiv 5[11]. \end{cases}$ Montrer que x est une solution de S si et seulement si $x \equiv 126[341]$.
4. Soit $\mathcal{N} = 5 - 3 \times 121^{2010}$. Déterminer le reste dans la division Euclidienne de N par 341.