FEUILLE DE REVISION 8

EXERCICE .1

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x - 1 + \dfrac{2}{e^x + 1}$. On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, avec $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 2cm$.

-I-

1) a) Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

b) i) Montrer que la droite $\mathscr{D}_1 : y = x - 1$ est une aymptote à $\mathscr{C}_f$ au voisinage de $+\infty$.

ii) Etudier la position relative de $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{C}_f$.

2) a) Montrer que pour tout réel x ona $f(x) + f(-x) = 0$ et déduire que f est impaire.

b) Déduire alors l'équation de l'asymptote $\mathscr{D}_2$ à $\mathscr{C}_f$ au voisinage de $-\infty$ et présiser la position relative de $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{D}_2$.

3) a) i) Montrer que pour tout réel x, on a : $f'(x) = \dfrac{1 + e^{2x}}{(1 + e^x)^2}$.

ii) Dresser le tableau de variation de f.

b) Déterminer une équation de la tangente $\mathcal{T}$ à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0.

c) Tracer $\mathcal{T}$, $\mathscr{D}_1$, $\mathscr{D}_2$ et $\mathscr{C}_f$.

-II-

1) Montrer que pour tout réel x ona $f(x) = x + 1 - \dfrac{2e^x}{e^x + 1}$.

2) Soit n un entier naturel, on appelle u_n l'aire en cm^2 du domaine Γ_n limité par la courbe $\mathscr{C}_f$, la droite $\mathscr{D}_1$ et les droites d'équations respectives : $x = n$ et $x = n + 1$.

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $u_n = 8\displaystyle\int_n^{n+1} \left(1 - \dfrac{e^x}{1 + e^x}\right) dx$.

b) Calculer u_n et montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 8\left[1 - \ln\left(\dfrac{1 + e^{n+1}}{1 + e^n}\right)\right]$.

c) Représenter le domaine Γ_0.

d) i) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 8\left[1 - \ln\left(\dfrac{e + e^{-n}}{1 + e^{-n}}\right)\right]$.

ii) Déduire $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} u_n$.

EXERCICE .2

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$ Soit le cercle $(\mathcal{C})$ de centre O et de rayon 1 et B le point d'affixe $z_B = i\sqrt{2}$.

1) a) Placer le point A d'affixe $z_A = 2i\sqrt{2}$.

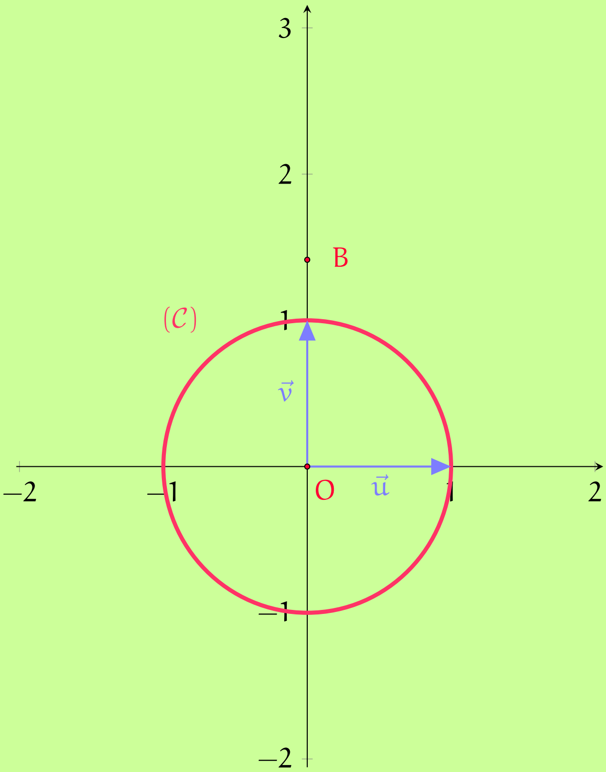
b) Soit K le point d'affixe $z_K = \dfrac{1 + i}{\sqrt{2}}$.

i) Montrer que $K \in (\mathcal{C})$.

ii) Calculer $(z_K - z_B) \times \overline{z_K}$ et déduire que le triangle OKB est rectangle en K.

iii) Construire alors le point K.

2) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - (1 + i)\sqrt{2}z + 1 + i = 0$



③ On désigne par P et Q les points d'affixes respectives $z_P = \frac{\sqrt{2}}{2}\left[1 + i\left(1 - \sqrt{2}\right)\right]$ et $z_Q = \frac{\sqrt{2}}{2}\left[1 + i\left(1 + \sqrt{2}\right)\right]$.

- (a) Vérifier que K est le milieu de $[PQ]$.
- (b) Montrer que $(z_Q - z_P) \times \overline{z_A} \in \mathbb{R}$ et deduire que $(PQ)//(OA)$.
- (c) Montrer que $PQ = 2$.
- (d) Construire alors les points P et Q.

EXERCICE .3

① Soit dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $(E) : 4x - 9y = 1$.

- (a) Justifier que si le couple d'entiers (a, b) est une solution de (E) alors a et b sont premiers entre eux.
- (b) Montrer que si le couple d'entiers (a, b) est une solution de (E) alors $a \equiv 7[9]$.
- (c) Résoudre alors dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation (E).

② Soit dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $(E') : 4x - 9y = 3$.

- (a) Soit (a, b) un couple solution de (E'), quelles sont les valeurs possibles de $d = a \wedge b$.
- (b) Résoudre alors dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation (E').
- (c) En déduire les solutions (x, y) de (E') telles que $x \wedge y = 3$.

③ Soit dans $\mathbb{Z}$ le système de congruence simultané $\mathcal{S} : \begin{cases} 3x \equiv 1[4] \\ 5x \equiv 3[9]. \end{cases}$

- (a) Montrer que le système $\mathcal{S}$ est équivalent au système $\mathcal{S}' : \begin{cases} x \equiv 3[4] \\ x \equiv 6[9]. \end{cases}$
- (b) En déduire le reste dans la division Euclidienne de tout entier x solution de $\mathcal{S}$ par 36.