SÉRIE NOMBRES COMPLEXES ET LIMITES ET CONTINUITÉ

BAC MATHS

EXERCICE 1 :

Le plan P est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$. Soit f l'application de P\{O} dans P qui à tout point M(z) associe le point M'($z'=\dfrac{z^2-9}{2z}$). On désigne par A(3i) et par B(-3i)

1) a) Déterminer les points invariants par f.

   b) Montrer que z' est imaginaire si et seulement si M', A et B sont alignés .

   c) Montrer que si $z \neq 3i$ alors on a: $\dfrac{z'+3i}{z'-3i}=\left(\dfrac{z+3i}{z-3i}\right)^2$

   d) Déduire que pour tout $M \neq A$ et $M \neq B$: $(\overrightarrow{M'A},\overrightarrow{M'B}) \equiv 2(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB})[2\pi]$.

   En déduire l'ensemble des points M si z' est imaginaire pur

2) Soit $\theta \in \left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[$

   a) Ecrire sous forme exponentielle les nombres complexes z_1 et z_2 affixes respectives des points M_1 et M_2 antécédents de $M'(3i\sin\theta)$ par f.

   b) Montrer que A, B, M_1 et M_2 sont situés sur un même cercle que l'on précisera.

   c) Préciser la nature du triangle BM_1M_2

EXERCICE 2 :

Le plan complexe P rapporte a un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$. Soient les points A(−i) et B(−1) et f l'application : P\{A} → P,

$$M(z) \rightarrow M'(z') \text{ avec } \quad z' = \frac{1+iz}{1-iz}$$

1) Déterminer l'ensemble des points M(z) tel que $z' \in \mathbb{R}$.

2) Déterminer l'ensemble des points M(z) tel que $|z'| = 1$.

3) a- Montrer que $(z' + 1)(z + i) = 2i$.

   b- Déterminer l'ensemble des points M' lorsque M décrit cercle de centre A et de rayon 1.

4. Soit $\theta \in]0, \pi[$ et $z = e^{i\theta}$,.

   a- Donner l'écriture exponentielle des nombres complexes : $1 + e^{i\theta}$ et $1 - e^{i\theta}$.

   b- Donner la forme exponentielle de $1 + iz$ et $1 - iz$.

   En déduire la forme exponentielle de z'.

c- Soit N un point d'affixe $1 + iz$, déterminer l'ensemble des points N lorsque θ varie sur $]0, \pi[$.

EXERCICE 3 :

Le plan complexe étant rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

I) On donne dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $z^2 - a(1 + 2i)z + (-1 + i)a^2 = 0$, $a \in \mathbb{C}^*$ et on note z_1 et z_2 ses solutions.

1) Montrer que : $z_1.z_2$ est réel $\Leftrightarrow \arg(a) = -\frac{3\pi}{8} + k\frac{\pi}{2}$ où $k \in \mathbb{Z}$.

2) Déterminer a pour que z_1 et z_2 soient inverses.

3) Déterminer z_1 et z_2 .

II) Dans cette partie a étant un réel non nul. On considère les points A, B , C, D et M les points d'affixes respectives : 1 , $1 + i$, a , $i.a$ et z.

1) a) Etablir que les points A , D et M sont alignés $\Leftrightarrow (1 + ia)z + (ia - 1)\overline{z} = 2ia$.

b) Montrer que : $(AD) \perp (OM) \Leftrightarrow (1 + ia)z - (ia - 1)\overline{z} = 0$.

2) Soit h l'affixe du point H projeté orthogonal du point O sur la droite (AD).

a) Montrer que : $h - (1 + i) = \frac{i}{a}(h - a)$.

b) En déduire que $(CH) \perp (BH)$.

EXERCICE 4 :

Le plan P est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $z^2 - 2i(z + \overline{z}) + 1 = 0$

1) a) Vérifier que i est solution de (E).

b) Montrer que (E) est équivalente à (E') : $(z - i)^2 = 2i\overline{(z - i)}$.

2) Soit z une solution de (E') et $z \neq i$.

a) Déterminer $|z - i|$ et $\arg(z - i)$.

b) Donner les solutions de (E') sous forme algébrique.

c) Soient les points $J(i)$, $A(\sqrt{3} + 2i)$, $B(-\sqrt{3} + 2i)$ et $C(-i)$.

Montrer que ABC est un triangle équilatéral direct inscrit dans le cercle (Γ) de centre J et de rayon 2.

3) Soit M un point quelconque du plan d'affixe z et distinct de A et B. On considère les points A' et B'

vérifiant : $\begin{cases} MA' = MA \\ (\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MA'}) \equiv -\frac{\pi}{3}[2\pi] \end{cases}$ et $\begin{cases} MB'=MB \\ (\overrightarrow{MB},\overrightarrow{MB'}) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi] \end{cases}$.

a) Calculer les affixes des points A' et B' en fonction de z.

b) Montrer que $\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MA'} + \overrightarrow{MB'}$.

4) a) Déterminer l'ensemble (C) des points M du plan tels que M , A' et B' soient alignés.

b) Soit M un point de l'arc $\overset{\frown}{CA}$ de (Γ) distinct de A et C.

Montrer que M ∈ [A'C]. En déduire que MA + MC = MB.

EXERCICE 5 :

1) a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 + i(e^{i\theta} - 2)z + e^{i\theta} - 1 = 0$,avec $\theta \in \left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$.

b) Ecrire les solutions sous forme exponentielle.

2) Dans le plan complexe est muni du repère orthonormé direct ,$(O,\vec{u},\vec{v})$ on considère les points A(1), B(i) et $N(i - ie^{i\theta})$ et on désigne par : $f : P\backslash\{B\} \to P\backslash\{A\}$; $M(z) \mapsto M'(z') / z' = \frac{\bar{z} - i}{\bar{z} + i}$

a) Déterminer et construire l'ensemble (E) des points *N* lorsque varie dans $\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$.

b) Montrer que $z \neq i$ et $|z| = 1$ alors *z'* est imaginaire .

c) Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{AM'}$ et $\overrightarrow{BM}$ sont orthogonaux.

d) Construire point *M'* lorsque le point *M* est un point du cercle trigonométrique distinct de *B* .

3) a) Soit $\alpha \in]0,2\pi[\backslash\{\pi\}$. Montrer que si $z \neq i$ et $\frac{\bar{z} - i}{\bar{z} + i} = e^{i\alpha}$ alors $z = \frac{-1}{\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$

b) Résoudre alors dans $\mathbb{C}$ l'équation : $(\bar{z} - i)^3 = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i)(\bar{z} + i)^3$.

EXERCICE 6 :

A – On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E): z^3 - 2(\sqrt{3}+i)z^2 + 4(1+i\sqrt{3})z - 8i = 0$

1) a) Montrer que (E) admet une solution imaginaire pure que l'on déterminera

b) Résoudre (E)

2) Pour θ réel , on note $(E_\theta): z^3 - 2e^{i\theta}(\sqrt{3}+i)z^2 + 4e^{2i\theta}(1+i\sqrt{3})z - 8ie^{3i\theta} = 0$

a) Démontrer que : z est solution de (E_θ) si et seulement si $(ze^{-i\theta})$ est solution de (E)

b) En déduire les solutions de l'équation $(E_\pi): z^3 + 2(\sqrt{3}+i)z^2 + 4(1+i\sqrt{3})z + 8i = 0$

B – Le plan complexe étant muni du repère orthonormé $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$

1) a) Calculer $(\sqrt{3}+i)^6$

b) Montrer que les images des solutions de (E) et (E_π) sont les sommets d'un polygone régulier

2) Soient A, B et C les points d'affixes respectives $z_A = e^{i\frac{\pi}{6}}, z_B = -e^{-i\frac{\pi}{6}}$ et $z_C = -i$

On pose $a = 2e^{i\frac{\pi}{6}} = \sqrt{3}+i$, $(\Gamma) = \left\{M \in P, M(z) \text{ tel que } Arg(\frac{4iz+a^2}{2z-a}) \equiv \frac{5\pi}{6}[2\pi]\right\}$

a) Montrer que $C \in (\Gamma)$

b) Déterminer et construire (Γ)

EXERCICE 7 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : f(x) = $\begin{cases} \dfrac{x+\cos(\pi x)}{x-1}+x-1 & \text{si } x<1 \\ \sqrt{x^2+x+2}-x & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

On désigne par $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. Interpréter graphiquement le résultat.

2) a) Montrer que pour tout x ∈]-∞,1[on a : $\dfrac{x^2-x+2}{x-1} \leq f(x) \leq x$.

b) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x}$. Interpréter graphiquement le résultat.

3) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

4) a) Montrer que l'équation f(x) = x – 1 admet au moins une solution $\alpha \in \left]-\frac{1}{2},0\right[$.

b) Vérifier que $\tan(\pi\alpha) = \dfrac{\sqrt{1-\alpha^2}}{\alpha}$.

5) Soit g la fonction définie sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ par g(x) = $f\left(\dfrac{1}{\cos x}\right)$.

a) Montrer que g est continue sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$.

b) g est-elle prolongeable par continuité à gauche en $\frac{\pi}{2}$?

EXERCICE 8 :

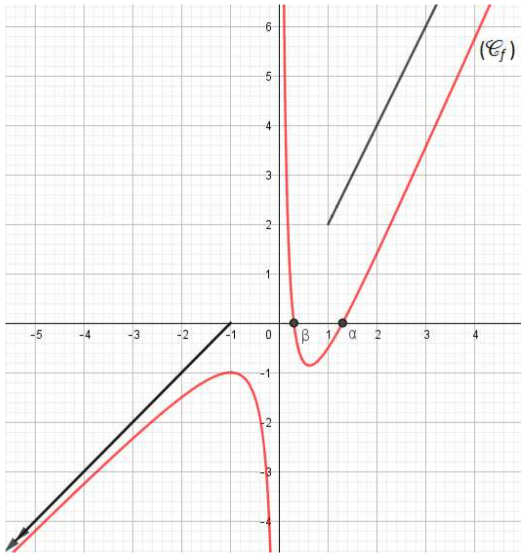
La courbe $(\mathscr{C}_f)$ ci-contre est celle d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$.

On sait que :

- $(\mathscr{C}_f)$ admet au voisinage de + ∞ une branche parabolique de

Direction la droite D : y = 2x.

- La droite D' : y = x + 1 est une asymptote oblique à ($\mathscr{C}_f$) au Voisinage de - ∞.
- ($\mathscr{C}_f$) coupe l'axe des abscisses en deux points d'abscisses α et β.



1) Par lecture graphique déterminer (en justifiant) :

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - 2x$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(fof)(x)}{x}$.

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} (fof)(x) - f(x)$, $\lim\limits_{x\to0^+} (fof)(x) - 2f(x)$ et $\lim\limits_{x\to0^-} (fof)(x) - f(x)$.

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} f^2(x)\left(1-\cos(\dfrac{1}{f(x)})\right)$ et $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \cos(x).f(\dfrac{1}{\cos x})$.

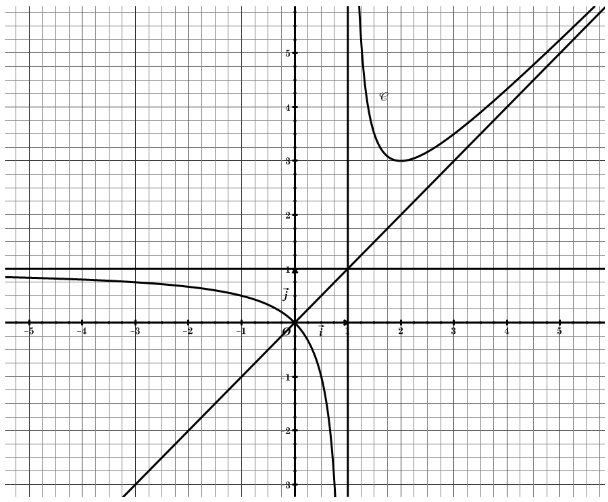
2) a) Déterminer l'ensemble de définition de fof.

b) Etudier le sens de variations de la fonction fof sur]-∞ , -1] puis déterminer (fof)( ]-∞ , -1]).

3) Montrer que l'équation f(x) = f(x + $\dfrac{\alpha-\beta}{2}$) admet au moins une solution dans l'intervalle $[\beta,\alpha]$.

EXERCICE 9 :

La courbe ci-contre est la représentation graphique d'une fonction f .



1) a) Préciser $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to1^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{f(x)-1}$.

b) Déterminer en justifiant :

$$\lim_{x\to0} \frac{\sin(f(x))}{f(x)} \text{ et } \lim_{x\to+\infty} f(\frac{x+2}{x+1}).$$

c) Déterminer l'image de $]-\infty,0]$ par la fonction f .

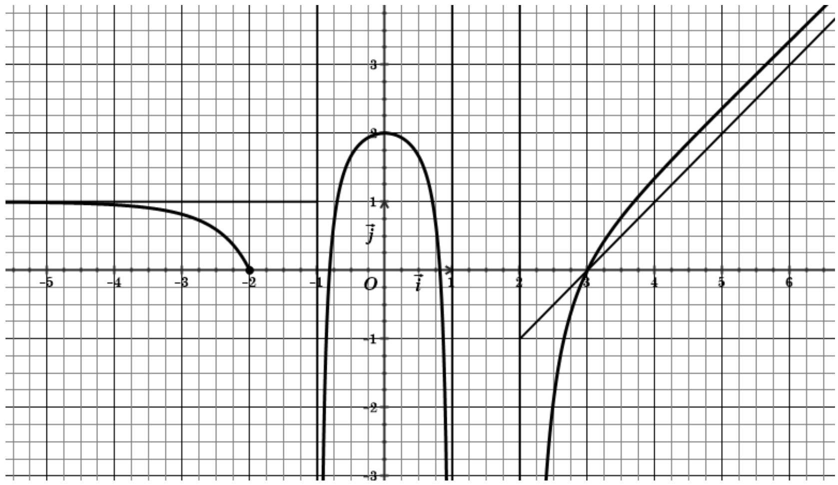
2) Montrer que l'équation $f(x) = \dfrac{2}{5}$ admet une unique solution α dans $]-1,0[$.

3) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}-\{-2,2\}$ par : $g(x) = \begin{cases} f(x) & si \;\; x > 2 \\ \dfrac{\sqrt{x^2+5}-3}{x^2-4} & si \;\; x < 2 \end{cases}$

g est-elle prolongeable par continuité en 2 ? Justifier.

EXERCICE 10 :

Dans la figure ci-contre on a représenté graphiquement la courbe $\mathscr{C}_f$ d'une fonction f définie sur $]-\infty\,;-2]\cup]-1\,;1[\cup]2\,;+\infty[$ et continue sur chaque intervalle. Les droites d'équations $y = x-3$; $y=1$; $x=1$; $x=-1$ et $x=2$ sont des asymptotes à $\mathscr{C}_f$.



1) Déterminer les limites suivantes : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{f(x)-x}\right)$ et $\lim\limits_{x\to0^-}\left(\dfrac{f\left(\dfrac{1-\cos x}{x}\right)}{f(x-2)}\right)$.

2) Soit g la fonction définie par $g(x)=f\left(\dfrac{1}{x}\right)$.
   a) Déterminer l'ensemble de définition de g.
   b) Montrer que g est strictement croissante sur $]1\,;+\infty[$.
   c) Montrer que l'équation $g(x)=0$ admet dans $]1\,;+\infty[$ une solution unique α et que $1<\alpha<2$.

3) Soit u la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0=2$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}=g(u_n)+u_n$.
   a) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n>\alpha$.
   b) Etudier la monotonie de u. En déduire la limite de u.

EXERCICE 11 :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $n \geq 2$, f_n la fonction définie sur $[0;\dfrac{\pi}{2}[$ par $f_n(x) = n\tan x - x - n$.

1) a) Montrer que la fonction f_n est strictement croissante sur $[0,\dfrac{\pi}{2}[$.

b) Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une solution unique α_n dans $[0,\dfrac{\pi}{2}[$.

c) Vérifier que $\alpha_n \in \left]\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2}\right[$ et que $\tan(\alpha_n) = 1 + \dfrac{\alpha_n}{n}$.

2) a) Montrer que $\forall x \in \left]\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2}\right[$; $f_{n+1}(x) > f_n(x)$.

b) En déduire que (α_n) est décroissante.

c) Montrer que la suite(α_n) est convergente et calculer sa limite.

EXERCICE 12 :

On donne la courbe représentative (C) d'une fonction f définie sur IR. La courbe (C) admet la droite D : y = 2 comme asymptote au voisinage de – ∞ et +∞ . La courbe (C) passe par les points A(-1 , 0) , B(0, $-\frac{2}{5}$) , C(1 , –1) , D(2 , 0) et E (3,1).

1) a) Etudier $\lim\limits_{x\to+\infty} f\circ f$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f\circ f$, $\lim\limits_{x\to 0} f\left(\frac{\sin x}{x}\right)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f\left(\frac{2x+\sin x}{x+1}\right)$.

b) Etudier la continuité de $f\circ f$ en -1 et en 3.

2)Soit g la fonction définie sur [0, $\frac{\pi}{2}$] par : g(x) = $\begin{cases} f(\tan x) & \text{si } x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right[\\ 2 & \text{si } x = \frac{\pi}{2} \end{cases}$

a) Etudier la continuité de g à gauche en $\frac{\pi}{2}$.

b) Etudier la continuité de g en $\frac{\pi}{4}$.

c) Déterminer les intervalles où g est continue.

3) a) Montrer que g est strictement décroissante sur [0, $\frac{\pi}{4}$].

b) Montrer que pour tout entier naturel n supérieur où égal à 3 l'équation : g(x) = $\frac{1-n}{1+n}$ admet dans l'intervalle [0, $\frac{\pi}{4}$] une seule solution (a_n).

c) Montrer que (a_n) est croissante et qu'elle converge vers $\frac{\pi}{4}$.