4 Soit l'application f du plan complexe P muni du repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$ dans lui même qui à tout point M(z) associe le point M'(z') tel que $z'=\frac{1-i\sqrt{3}}{2}z+i$.

a) Montrer que f est une rotation dont on précisera son angle et son centre Ω. On donnera z_Ω sous forme exponentielle.

b) On définit les points M_n pour $n\in\mathbb{N}$ par $M_0=O$ et $M_{n+1}=f(M_n)$. On note z_n l'affixe de M_n et on pose $Z_n=z_n-e^{i\frac{\pi}{6}}$. Vérifier que $Z_{n+1}=\frac{1-i\sqrt{3}}{2}Z_n$.

c) En déduire la construction du point M_{2009}.

5 Soit m un nombre complexe de module $\sqrt{2}$.

1°) Soit $P(z)=mz^3-(m+2)z^2+(\overline{m}+2)z-\overline{m}$; $z\in\mathbb{C}$.

a) Vérifier que 1 est une solution de l'équation $P(z)=0$.

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z)=0$.

2°) Le plan complexe rapporté à un repére orthnormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$. On considére les points $M'\left(\frac{1+i}{m}\right)$ et $M''\left(\frac{1-i}{m}\right)$.

a) Montrer que M'' est l'image de M' par une rotation de centre O dont on précisera l'angle.

b) Si $\arg m\equiv\alpha[2\pi]$ où $\alpha\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$.

Déterminer l'ensemble E' des points M' puis déduire l'ensemle E'' des points M''.

3°) Soit l'application $f:P\to P$; $M(z)\mapsto M'(z')/z'=(1+i)z$

a) Montrer que $OM'=\sqrt{2}OM$ et que $\left(\widehat{\overrightarrow{OM},\overrightarrow{OM'}}\right)\equiv\frac{\pi}{4}[2\pi]$.

b) Montrer que le triangle OMM' est rectangle et isocéle. En déduire un procédé de construction du point M'.

4°) On considére les points A_n définis par : $A_0\left(\frac{-1+i}{\sqrt{2}}\right)$ et $A_{n+1}=f(A_n)$ où $n\in\mathbb{N}$.

Pour quelles valeurs de n les points O, A_0 et A_n sont ils alignés ?