Lycée Pilote de Sfax A/S 2019-2020	Série N°13 Fonction ln	Mr : Mourad EL arbi 4ème Math

1 Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[\setminus \{1\}$ par $f(x) = \dfrac{1+\ln(x)}{x\ln(x)}$.

On désigne par C_f la courbe de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

① Déterminer $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$.

② a) Montrer que f est dérivable sur chacun des intervalles $]0, 1[$ et $]1, +\infty[$ et que

$$f'(x) = \frac{-\left(\ln^2(x) + \ln(x) + 1\right)}{\left(x\ln(x)\right)^2}.$$

b) Dresser le tableau de variation de f.

③ Déterminer le point d'intersection de C_f avec l'axe des abscisses.

④ Tracer C_f.

⑤ Calculer l'aire de la partie du plan limitée par C_f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = \frac{1}{e}$ et $x = \frac{1}{e^2}$.

⑥ Soit g la fonction définie sur $]0, 1[$ par $g(x) = \dfrac{f(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}$.

On désigne par C_g la courbe de g dans le même repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

a) Montrer que pour tout $x \in]0, 1[$, $f(x) - g(x) = \dfrac{-1}{x\ln(x)}$.

b) Soit $x \in]0, 1[$, on désigne par M et N les points respectifs de C_f et C_g de même abscisse x. Déterminer la position des points M et N pour que la distance MN soit minimale.

2 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \ln\left(x^2 - 2x + 2\right)$.

On désigne par C_f la courbe de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

① a) Montrer que la droite D d'équation $x = 1$ est un axe de symétrie de C_f.

b) Dresser le tableau de variation de f sur $[1, +\infty[$.

c) Montrer que C_f admet deux points d'inflexions à déterminer.

d) Tracer C_f en précisant les tangentes aux points d'inflexions.

② Soit g la fonction définie sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ par $g(x) = \displaystyle\int_1^{1+\tan(x)} \frac{dt}{t^2 - 2t + 2}$

a) Montrer que g est dérivable sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ et déterminer $g'(x)$ pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$.

b) En déduire la valeur de l'intégrale $I = \displaystyle\int_1^2 \frac{dt}{t^2 - 2t + 2}$

③ a) Vérifier que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\dfrac{x^2 - x}{x^2 - 2x + 2} = 1 + \dfrac{x-1}{x^2 - 2x + 2} - \dfrac{1}{x^2 - 2x + 2}$

b) Calculer l'aire de la partie du plan limitée par C_f, l'axe des abscisses et les droites d'équations x