3 ① a) Montrer que pour tout $x \in [1, +\infty[$, $x - \ln x \neq 0$.

b) Soit g la fonction définie sur $[1, +\infty[$ par $g(x) = \dfrac{1}{x - \ln x}$.

Etudier g et tracer sa courbe C_g dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

② Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = \displaystyle\int_n^{2n} \frac{dx}{x - \ln x}$.

Interpréter graphiquement la valeur de u_n.

③ a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\int_n^{2n} \frac{dx}{x} = \ln 2$.

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n - \ln 2 = \displaystyle\int_n^{2n} \frac{\ln x}{x(x - \ln x)} dx$.

c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq u_n - \ln 2 \leq \dfrac{\ln(2n^2)}{n - \ln(n)}$.

d) Montrer que $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} u_n = \ln 2$.

4 Soit f la fonction définie sur $]-\infty, 1[$ par $f(x) = -\ln(1 - x)$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$, $S_n = \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$ et $I_n = \displaystyle\int_0^{1-\frac{1}{n}} f(t)\,dt$.

① a) Montrer que Pour tout $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$, $I_n = 1 - \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n} \ln\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

b) Calculer $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} I_n$.

② a) Etudier les variations de f. = dresser le tableau

b) Soit $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$ et $k \in \{0, 1, \ldots\ldots, n-2\}$, montrer que $\dfrac{1}{n} f\left(\dfrac{k}{n}\right) \leq \displaystyle\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(x)\,dx \leq \frac{1}{n} f\left(\frac{k+1}{n}\right)$.

c) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$, $S_n + \dfrac{1}{n} \ln\left(\dfrac{1}{n}\right) \leq I_n \leq S_n$.

d) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$, $I_n \leq S_n \leq I_n - \dfrac{1}{n} \ln\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

③ a) Montrer que $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$, $S_n = \ln\left(\dfrac{n}{\sqrt[n]{n!}}\right)$.

b) En déduire que $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = e$.

5 Soit f la fonction définie sur $]0, 1]$ par $f(x) = \displaystyle\int_2^{\frac{2}{x}} \ln\left(t + \sqrt{t^2 - 4}\right) dt$.

① Montrer que f est dérivable sur $]0, 1]$ et calculer $f'(x)$.

② a) Montrer que pour tout $t \in [2, +\infty[$, $\ln\left(t + \sqrt{t^2 - 4}\right) \geq \ln t$.

b) En déduire que pour tout $x \in]0, 1]$, $f(x) \geq \dfrac{2}{x}\left(\ln\left(\dfrac{2}{x}\right) - 1\right)$.

c) Calculer alors $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} f(x)$.

③ Tracer l'allure de la courbe de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.