3 Soit f la fonction définie sur $]-1,+\infty[$ par $f(x)=e^{-x}-1+\ln(1+x)$.

On désigne par C_f la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

① a) Dresser le tableau de variation de la fonction $h: x\mapsto e^{x}-x-1$.

b) En déduire le signe de h.

c) Dresser le tableau de variation de f.

d) Tracer C_f.

e) Calculer l'aire de la partie du plan limitée par C_f, l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x=2$.

② Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $\begin{cases} u_0=\dfrac{3}{2} \\ u_{n+1}=e^{1-u_n},\ n\in\mathbb{N}. \end{cases}$

On pose $v_n=u_{2n}$ et $w_n=u_{2n+1}$, $n\in\mathbb{N}$.

a) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $0<w_n<1<v_n$.

b) Montrer que $\ln\left(\dfrac{u_{n+2}}{u_n}\right)=-f(u_n-1)$.

c) En déduire que (v_n) est décroissante et (w_n) est croissante.

d) Montrer que (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

4 Soit F la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par $\begin{cases} F(x)=\displaystyle\int_{\ln x}^{2\ln x}\frac{e^{t}}{t}\,dt & \text{si } x\in]0,+\infty[\setminus\{1\} \\ F(0)=0,\ F(1)=\ln 2 \end{cases}$

On désigne par C_F la courbe représentative de F dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

① a) Montrer que pour tout $x\in]0,1[$, $\dfrac{x^2-x}{2\ln x}\le F(x)\le\dfrac{x^2-x}{\ln x}$.

b) Montrer que F est continue à droite en 0.

c) Etudier la dérivabilité de F à droite en 0 et interpréter le résultat graphiquement.

② a) Montrer que pour tout $x\in]0,1[$, $x^2\ln 2\le F(x)\le x\ln 2$

et que pour tout $x\in]1,+\infty[$, $x\ln 2\le F(x)\le x^2\ln 2$.

b) En déduire que F est continue en 1.

③ a) Justifier que pour tout $x\in]0,+\infty[\setminus\{1\}$, $F(x)-\ln 2=\displaystyle\int_{\ln x}^{2\ln x}\frac{e^{t}-1}{t}\,dt$.

b) Montrer que pour tout $x\in]0,+\infty[\setminus\{1\}$, il existe un réel c compris entre $\ln x$ et $2\ln x$

tel que $F(x)-\ln 2=\left(\dfrac{e^{c}-1}{c}\right)\ln x$.

c) En déduire que F est dérivable en 1 et déterminer $F'(1)$.

④ Montrer que F est dérivable sur chacun des intervalles $]0,1[$ et $]1,+\infty[$ et calculer $F'(x)$.

⑤ a) Montrer que pour tout $x\in]1,+\infty[$, $F(x)\ge\dfrac{x^2-x}{2\ln x}$.

b) Calculer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}F(x)$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{F(x)}{x}$.

⑥ Dresser le tableau de variation de F.

⑦ Tracer une allure de la courbe C_F ... point d'abscisse 1).