Lycée Pilote de Sfax A/S 2019-2020	Série N°16 Divisibilité dans Z	Mr : Mourad EL arbi 4ème Math

1 Soit a un entier naturel non divisible par 7.

On appelle ordre de a modulo 7, le plus petit entier naturel non nul k tel que $a^k \equiv 1 \pmod 7$.

① Montrer que k divise 6.

② Donner l'ordre modulo 7 de tous les entiers a compris entre 2 et 6.

③ Soit $n \in \mathbb{N}$ et $A_n = 2^n + 3^n + 4^n + 5^n + 6^n$. Déterminer le reste de A_{2020} modulo 7.

2 Pour tout entier naturel n on pose $a_n = n7^n + (n+1)7^{n+1} + (n+2)7^{n+2}$.

① Déterminer, suivant l'entier naturel n, le reste modulo 19 de 7^n.

② En déduire, suivant l'entier naturel n, le reste modulo 19 de a_n.

③ a) Soit p un entier naturel. Montrer que $a_p + a_{p+1} + a_{p+2}$ est divisible par 19.

b) En déduire le reste modulo 19 de $\sum_{i=0}^{100} a_i$.

3 On considère la suite (V_n) d'entiers naturels définie par $V_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $V_{n+1} = 10V_n + 21$.

① Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $3V_n = 10^{n+1} - 7$.

② a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $3V_n \equiv 4 - (-1)^n \pmod{11}$.

b) Déterminer, suivant les valeurs de l'entier naturel n, le reste modulo 11 de V_n.

③ a) Déterminer, suivant les valeurs de l'entier naturel n, le reste modulo 13 de 10^n.

b) Déterminer l'ensemble des entiers naturels n tels que $V_n \equiv 1 \pmod{13}$.

4 I/ Soit a et b deux entiers naturels non nuls tels que $a^3 + b^3 \equiv 0 \pmod{173}$.

① Vérifier que 173 est premier.

② Montrer que $a^{171} \equiv -b^{171} \pmod{173}$.

③ a) Montrer que 173 divise a si et seulement si 173 divise b.

b) Montrer que si 173 divise a alors 173 divise $a+b$.

④ On suppose que 173 ne divise pas a.

a) Montrer que $a^{172} \equiv b^{172} \pmod{173}$.

b) Montrer que $a^{171}(a+b) \equiv 0 \pmod{173}$.

c) Montrer que 173 divise $a+b$.

II/ Soit $E = \left\{(x,y) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \text{ tel que } x^3 + y^3 = 173(xy+1)\right\}$.

① Soit $(x,y) \in E$.

a) Montrer qu'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $x + y = 173k$.

b) Montrer que $k(x-y)^2 + (k-1)xy = 1$.

c) En déduire que $k = 1$.

② Déterminer l'ensemble E.