3 Soit f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $f(x) = x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$ si $x \succ 0$ et $f(0) = 0$.

On désigne par C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) a) Etudier la continuité et la dérivabilité de f à droite en 0.

b) Montrer que pour tout $x \in]0, +\infty[$, $f''(x) = \frac{-1}{x(x+1)^2}$.

c) En déduire le tableau de variation de f' puis le signe de f'.

d) Dresser le tableau de variation de f et tracer C_f.

e) Montrer que pour tout $x \geq 1$, $f(x) \geq \ln(2)$.

2) Soit la suite W définie sur $\mathbb{N}^*$ par $W_n = \frac{n^n}{n!}$.

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{W_{n+1}}{W_n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \geq 2$.

c) En déduire que pour tout $n \geq 6$, $W_n \geq 2^n$.

d) Déterminer alors $\lim\limits_{n\to+\infty} W_n$.

3) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$ tel que $U_n = \ln(W_{n+1}) - \ln(W_n)$.

4 Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = x^2 - 2\ln(x) - 1$. On désigne par **C** la courbe représentative de f dans un plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

I) 1) a) Etudier les variations de la fonction f.

b) Tracer la courbe **C**.

2) Soit λ un réel de l'intervalle $]0, 1[$ et $A(\lambda)$ la mesure de l'aire de la partie du plan limitée par la courbe **C** et les droites d'équations respectives $x = \lambda$, $x = 1$ et $y = 0$.

a) Calculer $A(\lambda)$.

b) Déterminer $\lim\limits_{\lambda\to0} A(\lambda)$.

II) 1) Soit n un entier naturel tel que $n \geq 2$.

a) Montrer que pour tout entier naturel k tel que $1 \leq k \leq n-1$, on a :

$$\frac{1}{n}f\left(\frac{k+1}{n}\right) \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t)\,dt \leq \frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right).$$

b) En déduire que :

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k+1}{n}\right) \leq A\left(\frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right).$$

2) On pose pour tout $n \geq 2$, $S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$.

a) Montrer que $A\left(\frac{1}{n}\right) \leq S_n \leq \frac{1}{n}f\left(\frac{1}{n}\right) + A\left(\frac{1}{n}\right)$.

b) En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \frac{4}{3}$.

3) a) Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n tel que $n \geq 2$, on a :

$$\sum_{k=1}^{n-1} k^2 = \frac{n(n-1)(2n-1)}{6}.$$

b) Montrer que $S_n = \frac{(n-1)(2n-1)}{6n^2} + 2\ln\frac{n}{\sqrt[n]{n!}} - 1 + \frac{1}{n}$.

c) En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}$ [illegible]