Lycée pilote Sfax Smaoui sofiène	**Série d'exercices n°19**	$4^{ème}$ Math

1 ① a) Déterminer le reste modulo 37 de 1000.

b) En déduire que pour tout entier naturel n, $10^{3n} \equiv 1 \pmod{37}$.

c) En déduire que $10^{10} + 10^{20} + 10^{30} \equiv 0 \pmod{37}$.

② Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que si $n \equiv 36 \pmod{37}$ alors $\sum_{k=0}^{n} 10^{3k} \equiv 0 \pmod{37}$.

2 ① a) Déterminer, pour tout entier n de $\{0,1,2,3,4\}$, le reste modulo 13 de 5^n.

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $18^{4n+1} - 44^{4n-1} - 96^{4n+2} \equiv 11 \pmod{13}$.

② a) Vérifier que pour tout entier x , $x + x^2 + x^3 + x^4 = x(x+1)(x^2+1)$.

b) Déterminer l'ensemble des entiers naturels n qui vérifient $5^n + 5^{2n} + 5^{3n} + 5^{4n} \equiv 0 \pmod{13}$.

3 Soit a et b deux entiers.

① Montrer que $(a+b)^7 \equiv a^7 + b^7 \pmod{7}$. (on pourra utiliser que pour tout k de $\{1,2,...,6\}$, 7 divise C_7^k).

② En déduire que $(a+b) \equiv 0 \pmod{7}$ si et seulement si $a^7 + b^7 \equiv 0 \pmod{7}$.

③ Déterminer le reste modulo 7 de $444444^7 + 333333^7$.

④ Déterminer tous les entiers naturels n tels que $n^7 + 128 \equiv 0 \pmod{7}$.

4 ① Résoudre dans $\mathbb{Z}$,

a) $x^2 \equiv 1 \pmod{5}$.   b) $x^2 \equiv 4 \pmod{5}$.

② Déterminer tous les couples d'entiers (x, y) tels que $x^2 y \equiv 1 \pmod{5}$.

5 Soit a un entier .

① a) Montrer que $a(a^2 - 1) \equiv 0 \pmod{6}$.

b) Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, $a(a^{2n} - 1) \equiv 0 \pmod{6}$.

② Montrer que $1001^{1001} + 1003^{1003} + 1005^{1005} \equiv 3 \pmod{6}$.

6 ① Déterminer tous les entiers a tels que $a + a^2 + a^3 \equiv 1 \pmod{7}$.

② Déterminer tous les entiers a tels que $a^6 \equiv 1 \pmod{7}$.

③ Déterminer le reste modulo 7 de $(7005)^6 - [7005 + 7005^2 + 7005^3]$.

7 ① a) Montrer que pour tous entiers naturels k et r, $5^{4k+r} \equiv 5^r \pmod{13}$.

b) Déterminer les restes possibles dans la division euclisienne de 5^n par 13 , $n \in \mathbb{N}$.

② Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $a_n = 1 + 5^n + 5^{2n} + 5^{3n}$.

a) Déterminer le reste modulo 13 de a_{2000} et a_{2001}.

b) Montrer que $a_n \equiv 0 \pmod{13}$ si ... multiple de 4.

③ Montrer que pour tout n