Lycée pilote Sfax Smaoui sofiène	**Série d'exercices n°20**	$4^{ème}$ M

1 1. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=2-e^x(x+1)$.

a. Dresser le tableau de variation de g.

b. En déduire que l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution α.

c. Donner un encadrement de α d'amplitude 0.1

d. Déterminer le signe de g.

2. Soit f la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par $f(x)=(1-x)\sqrt{e^x-1}$.

On désigne par C la courbe de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$. (Unité 2 cm).

a. Etudier la dérivabilité de f à droite en 0. Interpréter le résultat.

b. Dresser le tableau de variation de f.

c. Tracer C.

3. L'espace est muni du repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

Calculer le volume du solide de révolution obtenu en faisant tourner la courbe de la restriction de f à $[0,1]$ autour de l'axe $(O,\vec{i})$.

2 Soit u la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x)=e^x-e^{-x}$ et F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x)=\int_0^{u(x)}\sqrt{4+t^2}\,dt$. Soit $I=\int_0^{\frac{3}{2}}\sqrt{4+t^2}\,dt$.

1. a. Calculer $F(0)$.

b. Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.

c. Déterminer alors l'expression de F pour tout réel x.

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $e^x-e^{-x}=\frac{3}{2}$. En déduire la valeur de I.

3 Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n=\int_{\ln 2}^{n}e^{-x}\ln(e^x-1)dx$.

1. Calculer, en fonction de n, $I_n=\int_{\ln 2}^{n}\frac{1}{e^x-1}dx,\ n\geq 1$.

2. a. Montrer que pour tout $n\geq 1,\ u_n=I_n-e^{-n}\ln(e^n-1)$.

b. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$.

4 Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n=\int_0^n\left(1+\frac{x}{n}\right)^n e^{-2x}\,dx$.

a. Montrer que pour tout réel $t\geq 0$, $t-\frac{t^2}{2}\leq\ln(1+t)\leq t$.

b. En déduire que pour tout réel x de $[0,n]$, $e^{-x}.e^{-\frac{x^2}{2n}}\leq\left(1+\frac{x}{n}\right)^n e^{-2x}\leq e^{-x}$.

Montrer que pour tout $n\geq 1,\ u_n\leq 1-e^{-n}$.

a. Montrer que pour tout réel $t\geq 0$, $e^{-t}\geq 1-t$.

b. En déduire que pour tout réel x de $[0,n]$, $e^{-x}.e^{-\frac{x^2}{2n}}\geq e^{-x}-\frac{x^2}{2n}e^{-x}$.

. Calculer $\int_0^n x^2e^{-x}dx$, $n\geq 1$.