d. En déduire que pour tout $n \geq 1$, $u_n \geq 1 + e^{-n}\left(\frac{n}{2} + \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n}$.

4. Montrer alors que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

5 A) Soit f la fonction définie sur $I =]-\ln 2, +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2e^x - 1}}$. (C) désigne la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

) a) Dresser le tableau de variation de f

b) Préciser l'équation de la tangente T à (C) au point d'abscisse 0.

c) Tracer T et (C).

:) Soit g la fonction définie sur $]0, \pi[$ par $g(x) = -\ln(1 + \cos x)$.

a) Montrer que g réalise une bijection de $]0, \pi[$ sur I.

b) Soit $h = g^{-1}$. Montrer que h est dérivable sur I et que $h'(x) = f(x)$ pour tout $x \in I$.

c) Calculer alors l'aire de la partie du plan limitée par (C) et les droites $x = 0$, $y = 0$ et $x = \ln 2$.

3) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et F_n la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $F_n(x) = \int_0^x [f(t)]^n \, dt$.

1) a) Exprimer $F_1(x)$ en fonction de $h(x)$. En déduire que $\lim\limits_{x \to +\infty} F_1(x) = \frac{\pi}{2}$.

b) Calculer $F_2(x)$ en fonction de x. En déduire que $\lim\limits_{x \to +\infty} F_2(x) = \ln 2$.

) a) Vérifier que pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $0 \leq f(t) \leq e^{-\frac{t}{2}}$. En déduire que $0 \leq F_n(x) \leq \frac{2}{n}$, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$.

b) Montrer que F_n admet une limite finie notée L_n lorsque x tend vers $+\infty$.

c) Montrer que $F_n(x) + F_{n+2}(x) = \frac{2}{n}\left(1 - [f(x)]^n\right)$.

d) Montrer alors que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $L_n + L_{n+2} = \frac{2}{n}$ puis calculer L_3 et L_4.

6 Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = \frac{e^x}{x}$.

① Etudier f et tracer sa courbe C_f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

② Soit $\alpha > 0$. On désigne par $\mathcal{H}(\alpha)$ la partie du plan limitée par C_f, l'axe $(O, \vec{i})$ et les droites d'équations $x = \alpha$ et $x = \alpha + 1$.

a) Colorier $\mathcal{H}(0.5)$ et $\mathcal{H}(2)$.

b) Soit F la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $F(x) = \int_x^{x+1} \frac{e^t}{t} \, dt$.

Montrer que F est dérivable sur $]0, +\infty[$ et déterminer $F'(x)$.

c) En déduire la valeur de α pour laquelle l'aire de la partie $\mathcal{H}(\alpha)$ soit minimale.

7 1. Soit φ la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $\varphi(x) = (2x - 1)e^{2x} + 1$.

Dresser le tableau de variation de φ. En déduire le signe de $\varphi(x)$.

2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $\begin{cases} f(x) = \frac{e^{2x} - 1}{\ldots} \text{ si } x > 0 \end{cases}$