a. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}_+$.

b. Montrer que pour tout $x \in]0, +\infty[$, $f'(x) = \dfrac{\varphi(x)}{x^2}$.

c. En déduire le sens de variation de f.

3. Soit g la fonction définie sur $[1, +\infty[$ par $g(x) = \displaystyle\int_1^{\ln x} f(t)\,dt$.

Montrer que g est dérivable sur $]1, +\infty[$ et que $g'(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x \ln x}$.

4. On pose $h(x) = \dfrac{g(x) - g(1)}{x - 1}$, $x > 1$.

a. Vérifier que pour tout $x > 1$, $h(x) = \dfrac{1}{x-1} \displaystyle\int_0^{\ln x} f(t)\,dt$.

b. Soit $x > 1$, Montrer qu'il existe $c \in [0, \ln x]$ tel que $h(x) = \dfrac{\ln x}{x-1} f(c)$.

c. En déduire que g est dérivable à droite en 1 et déterminer $g'_d(1)$.

5. a. Montrer que pour tout $x \geq e$, $g(x) \geq \displaystyle\int_1^{\ln x} \frac{2t-1}{t}\,dt$.

b. Dresser le tableau de variation de g. (On ne cherchera pas à calculer $g(1)$).

$\boxed{8}$ Soit f la fonction définie sur $[1, +\infty[$ par $f(x) = e^{-x\sqrt{\ln x}}$.

On désigne par $\mathscr{C}$ la courbe de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. (unité 2 cm)

1. Etudier la dérivabilité de f à droite en 1 et interpréter le résulatat graphiquement.
2. Dresser le tableau de variation de f.
3. Montrer que $\mathscr{C}$ coupe la droite $\Delta : y = 0.5x$ en un seul point d'abscisse α et que $1.19 < \alpha < 1.2$
4. Tracer $\mathscr{C}$ et Δ.
5. a. Montrer que f réalise une bijection de $[1, +\infty[$ sur un intervalle J à préciser.

   b. Construire la courbe $\mathscr{C}'$ de la fonction réciproque de f.

6. On désigne par $\mathcal{A}$ l'aire de la partie du plan limitée par $\mathscr{C}$, $\mathscr{C}'$, l'axe des abscisses, la droite $x = \dfrac{\alpha}{2}$ et la droite $x = \alpha$.

a. Montrer que $\mathcal{A} = 2\displaystyle\int_1^{\alpha} f(x)\,dx + 1 - \frac{\alpha^2}{2}$.

b. En déduire que $1 - \dfrac{\alpha^2}{2} \leq \mathcal{A} \leq 2\alpha - 1 - \dfrac{\alpha^2}{2}$.

$\boxed{9}$ 1. Soit g la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $g(x) = 1 - x - e^{-2x}$.

a. Dresser le tableau de variation de g.

b. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α.

Donner une valeur approchée de α à 10^{-1} près.

c. En déduire le signe de $g(x)$ sur $[0, +\infty[$.

2. Soit f la fonction définie par $f(x) = x\sqrt{e^{\frac{2}{x}} - 1}$

On désigne par $\mathscr{C}$ la courbe de f dans un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

Etudier f et tracer $\mathscr{C}$.