Lycée pilote Sfax Smaoui sofiène	**Série d'exercices n°23**	$4^{ème}$ M

1

Soit p un nombre premier strictement supérieur à 7.

① Montrer que :

a) $p^6 - 1 \equiv 0 \pmod 7$.

b) $p^6 - 1 \equiv 0 \pmod 8$.

c) $p^6 - 1 \equiv 0 \pmod 9$.

② Montrer que $97^{6666} \equiv 1 \pmod{504}$.

2

① Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $(E) : 3x + 4y - 1 = 0$.

② Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Soit Δ la droite d'équation $3x + 4y - 1 = 0$.

Déterminer les points de Δ de coordonnées entières dont le carré de la distance à l'origine O est un multiple de 5.

3

① Déterminer $994 \wedge 5999$.

② a) Vérifer que le couple $(-1032, -171)$ est une solution de l'équation $(E) : 142x - 857y = 3$

b) Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation (E).

③ Soit n un entier naturel à 6 chiffres tel que lorsque l'on échange les trois premiers chiffres avec les trois derniers, le résultat obtenu est $6n + 21$.

Trouver n.

4

Un astronome a observé au jour J_0 le corps céleste A, qui apparait périodiquement tous les 105 jours.

Six jours plus tard, il a observé le corps B, dont la péride d'apparition est de 81 jours.

On appelle J_1 le jour de la prochaine apparition simultanée des deux objets.

① Soit u et v le nombre de périodes effectuées respectivement par A et B entre J_0 et J_1.

Montrer que (u, v) est solution de l'équation $(E) : 35x - 27y = 2$.

② a) Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation (E).

b) Déterminer la solution (u, v) permettant de trouver J_1.

③ a) Combien de jours s'écouleront entre J_0 et J_1 ?

b) Si l'astronome marque ce futur render-vous.

Combien de jours devra-t-il attendre jusqu'à la prochaine conjonction des deux corps ?