5 On considère l'équation (E) : $7x+4y=1$ avec $(x,y)\in\mathbb{Z}^2$.

1) a) Montrer que l'équation (E) admet des solutions.

b) Donner une solution particulière de (E) puis résoudre l'équation (E).

2) Résoudre dans $\mathbb{Z}$ le système $(S):\begin{cases} n\equiv 3\ (4) \\ n\equiv 2\ (7)\end{cases}$.

3) a) Soit k un entier naturel. Déterminer le reste de 3^{2k} modulo 4 et le reste de 2^{3k} modulo 7.

b) Vérifier que 2263 est une solution de (S) et montrer que $2263^{1008}-1$ est divisible par 28.

4) On considère l'équation (E') : $7x+4y=20$ avec $(x,y)\in\mathbb{Z}^2$.

a) Montrer que si $(x\ ,\ y)$ est une solution de (E') alors $x\equiv\ 0\ \ (4)$. Résoudre alors (E').

b) Soit $d=x\wedge y$ où $(x\ ,\ y)$ est une solution de (E'). Déterminer les valeurs possibles de d.

c) Déterminer l'ensemble des solutions de (E') dont le PGCD est 4.

d) Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ le système : $\begin{cases} 7x+4y=20 \\ x\wedge y=4 \\ x\vee y=308\end{cases}$.

6 On considère l'équation (E) : $138x-55y=5$ avec $(x,y)\in\mathbb{Z}^2$.

1) Montrer que si $(x\ ,\ y)$ est une solution de (E) alors $x\equiv\ 0\ \ (5)$.

2) Donner une solution particulière de (E) puis résoudre l'équation (E).

3) Pour tout entier n, on considère les nombres $a=55n+10$ et $b=138n+25$.

a) Vérifier que pour tout entier n, le couple (a,b) est une solution de (E).

b) Déterminer les valeurs possibles de $a\wedge b$.

c) Déterminer alors l'ensemble des entiers n tels que $a\wedge b=5$ et l'ensemble des entiers n tels que $a\wedge b=1$.

7 Soit α un entier non nul tel que $\alpha\neq 1$ et n un entier naturel non nul.

On pose $S=1+\alpha+\alpha^2+.......+\alpha^{n-1}$.

1) Donner une autre expression de S.

2) Montrer que α^n et $\alpha-1$ sont premiers entre eux.

3) Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $\alpha^n x+(\alpha-1)y=1$.

4) En déduire les solutions dans $\mathbb{Z}^2$ de l'équation: $3^n x+2y=5$.

8 1. Soit E l'ensemble des couples des entiers naturels non nuls $(a,\ b)$ tels que $a^2=b^3$.

Vérifier que E et non vide.

2. Soit $(a,\ b)\in E$. On note $d=a\wedge b$ et on désigne par a' et b' les entiers tels que $a=da'$ et $b=db'$.

a. Montrer que $a'^2=db'^3$.

b. En déduire que $b'=1$.

3. Montrer que $(a,\ b)\in E$ si et seulement si a et b sont respectivement le cube et le carré d'un même entier.

4. Montrer que si n est le carré d'un entier et le cube d'un autre entier alors $n\equiv 0(\text{mod}\,7)$ ou $n\equiv 1(\text{mo}$