4 Une personne est placée sous perfusion, c'est-à-dire injection continue, d'un antibiotique.

A l'instant $t = 0$, la quantité $Q(0)$ d'antibiotique présente dans le sang du malade est nulle.

Le débit de la perfusion, c'est-à-dire la quantité injectée par minute est un réel A strictement positif exprimé en milligrammes par minute $\left(mg.mn^{-1}\right)$.

On désigne par $Q(t)$ la quantité exprimée en milligrammes (mg) d'antibiotique dans le sang du patient, à l'instant t, exprimé en minutes (mn).

On suppose que la fonction Q est définie et dérivable sur l'intervalle $[0, +\infty[$ et qu'il existe un réel C strictement positif tel que la fonction Q vérifie l'équation différentielle $(E): y' = A - Cy$.

① a) Résoudre l'équation différentielle (E).

b) Déterminer $Q(t)$ en fonction de t, A et C.

c) Déterminer le sens de variation de la fonction Q et la limite de $Q(t)$ en $+\infty$. Interpréter ces résultats.

② On sait qu'au bout d'une heure, la quantité d'antibiotique présente dans le sang est la moitié de sa valeur limite.

a) Montrer que $C = \frac{1}{60}\ln 2$.

b) On souhaite obtenir une quantité limite de 80 mg d'antibiotique dans le sang du patient. Donner l'arrondi au centième du débit A que l'on doit alors établir.

c) Déterminer, en heure et minutes, le temps nécessaire pour que la quantité d'antibiotique présente dans le sang du malade ait atteint, à un milligramme prés, sa valeur limite 80 mg.

5 ① Résoudre l'équation différentielle (E) : $y'' + y = 0$.

② Soit g une fonction deux fois dérivables en tout réel de $\mathbb{R}^*$.

On désigne par f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = x\,g\left(\frac{1}{x}\right)$.

a) Exprimer $f''(x)$ à l'aide de $g''\left(\frac{1}{x}\right)$ et de x.

b) Montrer que la fonction g est solution de l'équation $(E'): y'' = \frac{-1}{x^4}y$, si et seulement si, la fonction f est solution de (E).

c) En déduire toutes les solutions de (E').

③ Soit g la restriction d'une solution de l'équation (E') à $]0, +\infty[$.

a) Déterminer une primitive de la fonction $h : x \mapsto \frac{1}{x^4}g(x)$

b) Calculer $\int_{\frac{1}{\pi}}^{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{x^3}\sin\left(\frac{1}{x}\right)dx$.

6 Soit E l'ensemble des fonctions définies et deux fois dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$ telles que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $x^2g''(x) - xg'(x) + g(x) = 0$.

① Montrer que E est non vide.

② Soit g et h deux fonctions deux fois dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$ telles que $g(x) = x\,h(x)$.

Utiliser cette égalité pour déterminer l'ensemble E.

7 Déterminer les fonctions f, trois fois dérivables sur $\mathbb{R}$, qui vérifient la relation, $f'''(x) + f'(x) = 0$ [...] tout réel x.