Lycée Pilote de Sfax A/S 2019-2020	Série N°30 Identité de Bezout	Mr : Mourad EL arbi 4ème Math

1 On considère dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ l'équation $(E): 16x+19y=2017$.

① Montrer que 2017 est un nombre premier.

② Vérifier que le couple $(18,91)$ est une solution de (E).

③ Résoudre dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ l'équation (E).

④ Soit (x,y) une solution de (E). Quelles sont les valeurs possibles de $x\wedge y$?

⑤ Justifier que 637 est un inverse de 19 modulo 2017.

⑥ Déterminer tous les couples (x,y) solutions de (E) tels que $x\wedge y=1$.

2 I/ On considère dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ l'équation $(E): 7x-18y=1$.

① Vérifier que le couple $(-5,-2)$ est une solution de l'équation (E).

② En déduire toutes les solutions de l'équation (E).

II/ Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on note l'entier naturel $U_n=\underbrace{111.......1}_{n\text{ fois}}$.

① Soit $n\in\mathbb{N}^*$.

a) Calculer $U_{n+1}-10U_n$.

b) En déduire le PGCD de U_n et U_{n+1}.

c) Vérifier que $9U_n=10^n-1$.

d) Montrer que si d divise n alors 10^d-1 divise 10^n-1.

e) En déduire que si d divise n alors U_d divise U_n.

② On se propose, dans cette question, de déterminer $U_7\wedge U_{18}$.

Soit (p,q) un couple d'entiers naturels non nuls tel que $7p-18q=1$.

a) Montrer que $\left(10^{7p}-1\right)-10\left(10^{18q}-1\right)=9$.

b) En déduire que $U_{7p}-10U_{18q}=1$.

c) Conclure.

3 Soit (x_n) et (y_n) les suites réelles définies sur $\mathbb{N}$ par $\begin{cases}x_0=3\\x_{n+1}=2x_n-1\end{cases}$ et $\begin{cases}y_0=1\\y_{n+1}=2y_n+3\end{cases}$.

① Montrer, par récurrence, que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $x_n=2^{n+1}+1$.

② Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $2x_n-y_n=5$.

③ On désigne par d_n le PCGD de x_n et y_n.

a) Donner les valeurs possibles de d_n.

b) Déterminer, suivant les valeurs de l'entier naturel p, le reste de la division euclidienne de 2^p par 5.

c) En déduire les valeurs de [illegible] y_n sont premiers entre eux.