

4 Soit  $p$  un nombre premier tel que  $p > 2$  et  $E_p = \{n \in \mathbb{N}, n^2 + 1 \equiv 0 \pmod{p}\}$ .

① Quels sont les restes possibles de la division euclidienne de  $p$  par 4.

② Déterminer  $E_5$ .

③ On pose  $p = 3 + 4k, k \in \mathbb{N}$ .

Supposons qu'il existe un entier naturel  $n$  tel que  $n^2 + 1 \equiv 0 \pmod{p}$ .

a) Vérifier que  $(n^2)^{1+2k} \equiv -1 \pmod{p}$ .

b) Montrer que  $n$  et  $p$  sont premiers entre eux.

c) En déduire que  $(n^2)^{1+2k} \equiv 1 \pmod{p}$ .

d) Déterminer  $E_p$ .