REPUBLIQUE TUNISIENNE MINESTERE DE L EDUCATION EXAMEN DU BACCALAUREAT SESSION 2021	Révision N°13	
	Épreuve : Mathématiques	Section : Mathématiques
	Durée : 4 h	coefficient du l'épreuve : 4

Exercice N° 1 ✪ Complexes ✪ ✳ 4 points ✳

On considère la suite (U_n) définie pour $n \geq 2$ par $U_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$.

1. Calculer U_2, U_3 et U_4
2. Montrer que pour tout $n \geq 2$ et pour tout réel x, on a : $\left(1-e^{ix}\right)\left(1+e^{ix}+e^{i2x}+\ldots+e^{i(n-1)x}\right)=1-e^{inx}$.
3. En déduire que pour tout $n \geq 2$, $\sum_{k=0}^{n-1} e^{i\frac{k\pi}{n}} = \frac{2}{1+e^{i\frac{\pi}{n}}}$.
4. Vérifier que pour tout $n \geq 2$, $1-e^{i\frac{\pi}{n}} = -2i \times \sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)e^{i\frac{\pi}{2n}}$.
5. En déduire que pour tout $n \geq 2$, $U_n = \frac{1}{n \times \tan\left(\frac{\pi}{2n}\right)}$.
6. Déterminer alors $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$ et vérifier que U_4 est une valeur approchée, de cette limite à 10^{-1} près.

Exercice N° 2 ✪ Arithmétiques ✪ ✳ 4 points ✳

1. Soit $x \in \mathbb{Z}$.
   a) Déterminer les restes modulo 7 de x^2.
   b) Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation $x^2+4x+3 \equiv 0 \pmod 7$
2. Soit n un entier naturel.
   a) Déterminer suivant les valeurs de n, le reste modulo 7 de 2^n.
   b) Déterminer le reste modulo 7 de l'entier 107^{2009}.
   c) Déterminer les entiers naturels n tels que $107^n+107^{2n}+107^{3n}$ soit divisible par 7.
3. Soit a un entier naturel non divisible par 7. On désigne par k le plus petit entier naturel non nul tel que $a^k \equiv 1 \pmod 7$.
   a) Montrer que le reste r de la division euclidienne de 6 par k vérifie $a^r \equiv 1 \pmod 7$
   b) Quelles sont alors les valeurs possibles de k.
4. A tout entier naturel n, on associe le nombre $A_n = 2^n+3^n+4^n+5^n+6^n$.
   Déterminer le reste modulo 7 de A_{2021}

4 On pose pour tout $x \in [0,+\infty[$, $F(x) = \int_0^x f(t)dt$.

a Montrer que pour tout $x \in [0,+\infty[$, $f(x) = \ln\left(e^x + \sqrt{e^{2x}-1}\right) - g^{-1}\left(\sqrt{e^{2x}-1}\right)$.

b En déduire l'aire de la partie du plan limitée par la courbe $\mathcal{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$, $x = \ln 2$ est égale à $\ln(2+\sqrt{3}) - \frac{\pi}{3}$.

5 On pose pour tout $x \in [1,+\infty[$ et pour tout $n \in$, $u_n(x) = \int_1^x \frac{e^t}{(1+e^t)^2 f^n(t)}dt$.

a Montrer que $u_0(x) = \frac{1}{1+e} - \frac{1}{1+e^x}$ et que $u_1(x) = f(x) - f(1)$.

b Vérifier que pour tout $t \in [1,+\infty[$, $\frac{e^t}{(1+e^t)^2 f^2(t)} = \frac{f'(t)}{f(t)}$.

Calculer alors $u_2(x)$.

c Montrer que pour tout entier naturel n tel que $n \geqslant 3$ et pour tout $x \in [1,+\infty[$,

$$u_n(x) = \frac{1}{n-2}\left(\frac{1}{(f(1))^{n-2}} - \frac{1}{(f(x))^{n-2}}\right)$$

6 Soit (v_n) la suite définie pour tout $n \geqslant 3$ par $v_n = u_n(\ln(3)) - u_n(\ln(2))$.

a Montrer que pour tout $n \geqslant 3$, $v_n = \frac{\sqrt{3}^{n-2} - \sqrt{2}^{n-2}}{n-2}$.

b Montrer que pour tout $n \geqslant 3$, $v_n = \frac{\sqrt{3}^{n-2}}{n-2}\left(1 - \sqrt{\frac{2}{3}}^{n}\right)$.

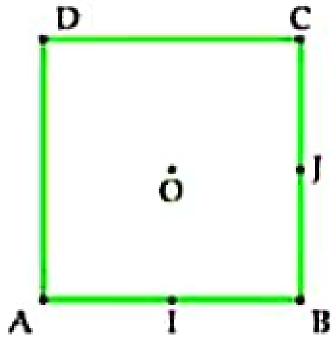
c Vérifier que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{e^{(n-2)\ln\sqrt{3}}}{n-2} = +\infty$. En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.

d Montrer que pour tout $n \geqslant 3$, $\ln(v_n) = \ln\left(1 - \sqrt{\frac{2}{3}}^{n}\right) + (n-2)\ln\sqrt{3} - \ln(n-2)$.

Montrer alors que $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{v_n} = \sqrt{3}$.

Exercice N° 3 ⚪ Isométries ⚪ ✻ 4 points ✻

Le plan est orienté dans le sens direct. Soit $ABCD$ un carré direct de centre O. On désigne par I et J les milieux respectifs des segments $[AB]$ et $[BC]$.



1. Soit R la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$.
   a) Donner la nature et les éléments caractéristiques de $R' = S_{(OA)} \circ S_{(AB)}$.
   b) Déterminer la droite Δ telle que $R = S_{\Delta} \circ S_{(OA)}$.
   c) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de $R \circ R'$.
   d) Soit $f = S_{(AD)} \circ R \circ R'$.
   Montrer que f est une symétrie glissante dont on précisera le vecteur et l'axe.
2. Soit g une isométrie du plan qui transforme l'ensemble $\{A, B, D\}$ en l'ensemble $\{B, C, D\}$ et telle que $g(A) = C$.
   a) Déterminer $g([BD])$.
   b) Déterminer alors toutes les isométries du plan qui transforment l'ensemble $\{A, B, D\}$ en l'ensemble $\{B, C, D\}$ et elles transforment A en C.

Exercice N° 4 ⚪ Analyse ⚪ ✻ 8 points ✻

Soit f la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x) = \sqrt{\frac{e^x - 1}{e^x + 1}}$.

On désigne par $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} = 1$. Interpréter graphiquement.
2. a) Vérifier que pour tout $x \in]0;+\infty[$, $\frac{f(x)}{x} = \sqrt{\frac{e^x - 1}{x}} \sqrt{\frac{1}{x(e^x + 1)}}$.
   En déduire que $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{f(x)}{x} = +\infty$. Interpréter graphiquement.
   b) Montrer que pour tout $x \in]0, +\infty[$, $f'(x) = \frac{e^x}{(e^x + 1)^2 f(x)}$.
   c) Dresser le tableau de variations de f.
   d) Tracer la courbe $\mathscr{C}_f$.
3. On pose pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$, $g(x) = \tan x$.
   a) Montrer que g est une bijection de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ sur $[0, +\infty[$. On note g^{-1} sa réciproque.
   b) Montrer que g^{-1} est dérivable sur $[0, +\infty[$ et que pour tout $x \in [0, +\infty[$,
   $(g^{-1})'(x) = \frac{1}{1 + x^2}$.