SUJET 01

Exercice 1 :

1. Soit θ étant un réel de l'intervalle $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

   On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation : $(E_\theta) : z^2 - \left(1 + 2e^{i\theta}\right)z + e^{i\theta} + e^{2i\theta} = 0$ Résoudre (E_θ).

2. Dans le plan rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on donne les points M et N d'affixes respectives $z_M = 1 + e^{i\theta}$ et $z_N = i + e^{i\theta}$.

   (a) On note $S(\theta)$ l'aire du triangle OMN. Vérifier que $\det(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}) = 1 + \cos\theta + \sin\theta$.

   (b) En déduire que $S(\theta) = \dfrac{1 + \cos\theta + \sin\theta}{2}$.

   (c) Vérifier que $\cos\theta + \sin\theta = \sqrt{2}\cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)$. En déduire la valeur de θ pour que : $S(\theta) = \dfrac{1 + \sqrt{2}}{2}$.

   (d) Montrer que pour tout réel θ dans $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, $S(\theta) \leq \dfrac{1 + \sqrt{2}}{2}$.

3. On note $d(\theta) = OM^2 + ON^2$ pour θ dans $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

   (a) Montrer que $z_M = 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\frac{\theta}{2}}$ et $z_N = 2\cos\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4}\right)e^{i\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right)}$.

   En déduire que $\left(\widehat{\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}}\right) \equiv \frac{\pi}{4} [2\pi]$.

   (b) Montrer que $d(\theta) = 2 + 4S(\theta)$.

   (c) Déduire la valeur maximale de d.

Exercice 2 :

A)

1. On considère la fonction f définie sur $[1, +\infty[$ par $\begin{cases} f(x) = \ln(x)\ln(\ln(x)) \text{ si } x > 1 \\ f(1) = 0 \end{cases}$

   On note $(\mathscr{C}_f)$ sa courbe représentative dans le repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

   (a) Montrer que f est continue à droite en 1.

   (b) Montrer que $\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{f(x)}{x - 1} = -\infty$ Interpréter graphiquement.

   (c) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

   (d) En écrivant $\dfrac{f(x)}{x} = \dfrac{\ln^2(x)}{x} \cdot \dfrac{\ln(\ln(x))}{\ln(x)}$, montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$. Interpréter graphiquement.

2. (a) Montrer pour tout $x \in]1, +\infty[$, $f'(x) = \dfrac{\ln(\ln(x)) + 1}{x}$.

   (b) Montrer que pour tout réel $x \in]1, +\infty[$, $\ln(\ln(x)) \geq -1$ si et seulement si $x \geq e^{\frac{1}{e}}$.

   (c) Dresser le tableau de variation de f.

   (d) Dans la Figure de l'annexe jointe, on a tracé dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ les courbes $(\mathscr{C}_1)$ et $(\mathscr{C}_2)$ respectives des fonctions $x \longmapsto \ln(x)$ et $x \longmapsto \ln(\ln(x))$ et la droite Δ d'équation $y = -1$.

La droite Δ coupe, respectivement, les courbes $(\mathscr{C}_1)$ et $(\mathscr{C}_2)$ aux points A et B. Montrer que les coordonnées des points A et B sont, respectivement , $\left(\frac{1}{e}, -1\right)$ et $\left(e^{\frac{1}{e}}, -1\right)$

(e) Tracer la courbe $(\mathscr{C}_f)$.

B) Soit n un entier naturel. On pose $u_n = \int_{e^{\frac{1}{e}}}^{e} (\ln(x))^n dx$ et $v_n = \int_{e^{\frac{1}{e}}}^{e} (\ln(x))^n f(x) dx$.

1. (a) Montrer que pour tout $n \geq 0$, $\quad u_n > 0$.

   (b) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que $u_{n+1} = e - \dfrac{e^{\frac{1}{e}}}{e^{n+1}} - (n+1)u_n$.

   (c) Montrer alors que : $0 < u_n < \dfrac{e}{n+1}$.

   (d) Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$. En déduire que $\lim\limits_{n \to +\infty} (n+1)u_n = e$.

2. Montrer que : $-\dfrac{u_n}{e} \leq v_n \leq 0$. Déterminer alors $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n$

3. (a) Vérifier que pour tout $x \in]1, +\infty[$, $\quad f(x) = \ln(x)\left(xf'(x) - 1\right)$.
   En déduire que $v_n = \left(\int_{e^{\frac{1}{e}}}^{e} x(\ln(x))^{n+1} f'(x) dx\right) - u_{n+1}$.

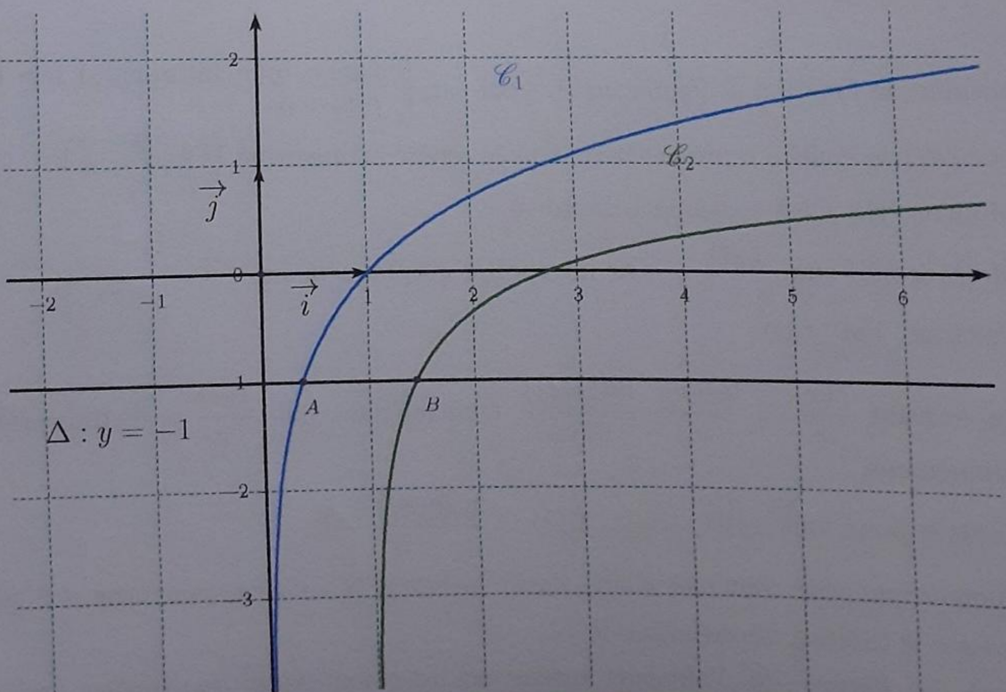
   (b) Montrer alors que pour tout entier naturel n, $\quad (n+2)v_n = \dfrac{e^{\frac{1}{e}}}{e^{n+2}} - v_{n+1} - u_{n+1}$.

   (c) En déduire que : $\lim\limits_{n \to +\infty} (n+2)v_n = 0$.

4. (a) Montrer qu'il existe un seul réel α_n appartenant à l'intervalle $\left[e^{\frac{1}{e}}, e\right]$ tel que $f(\alpha_n) = \dfrac{v_n}{u_n}$.

   (b) Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{v_n}{u_n} = 0$

   (c) Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} \alpha_n$.



Exercice 3 :

Le secteur de production d'une entreprise est composé de 3 catégories de personnel :

— Les ingénieurs ;

— Les opérateurs de production ;

— Les agents de maintenance.

Il y a 8% d'ingénieurs et 82% d'opérateurs de production. Les femmes représentent 50% des ingénieurs, 25% des agents de maintenance et 60% des opérateurs de production.

Partie A

Dans cette partie, on interroge au hasard un membre du personnel de cette entreprise. On considère les évènements suivants :

— M : « le personnel interrogé est un agent de maintenance » .

— O : « le personnel interrogé est un opérateur de production » .

— I : « le personnel interrogé est un ingénieur » .

— F : « le personnel interrogé est une femme » .

1. Construire un arbre pondéré correspondant aux données.
2. Calculer la probabilité d'interroger :
   (a) un agent de maintenance .
   (b) une femme agent de maintenance .
   (c) une femme.

Partie B

Le service de maintenance effectue l'entretien des machines, mais il est appelé aussi à intervenir en cas de panne. Pour cela une alarme est prévue. Des études ont montré que sur une journée :

— La probabilité qu'il n'y ait pas de panne et que l'alarme se déclenche est égale à $0,002$.

— La probabilité qu'une panne survienne et que l'alarme ne se déclenche pas est égale à 0,003 ;

— La probabilité qu'une panne se produise est égale à 0,04 .

Soit les évènements A « l'alarme se déclenche » et B « une panne se produit ».

1. Démontrer que la probabilité qu'une panne survienne et que l'alarme se déclenche est égale à $0,037$.
2. Calculer la probabilité que l'alarme se déclenche.
3. Calculer la probabilité qu'il y ait une panne sachant que l'alarme se déclenche.

Exercice 4 :

Dans le plan orienté $\mathscr{P}$. On considère un parallélogramme $ABCD$ de centre et tels que : $\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}}\right) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$ et $\left(\widehat{\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DB}}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$.

On désigne par I et J les milieux respectifs de $[CD]$ et $[AB]$ et$E = t_{2\overrightarrow{AB}}(D)$.

1. (a) Montrer que : $\frac{AD}{AB} = \frac{1}{2}$.
   (b) Montrer qu'il existe un unique déplacement R qui vérifie : $R(A) = E$ et $R(B) = D$.
   (c) Justifier que R est une rotation et préciser son angle.
2. (a) Montrer que $IA = IE$.
   (b) Montrer alors que I est le centre de R.
   (c) Montrer que : $R(C) = J$.
3. Les droites (AB) et (EC) se coupent en F.

(a) Montrer que AFE est un triangle équilatéral direct et I le centre de son cercle circonscrit.

(b) En déduire que $R(E) = F$.

4. Soit K le milieu de $[AE]$ et pour tout point M de $\mathscr{P}$, on pose : $M_1 = R(M)$ et $M_2 = R'(M)$.

(a) Caractériser l'application $R' \circ R^{-1}$ où R' est la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

(b) Montrer que lorsque M varie, K est le milieu de $[M_1M_2]$.

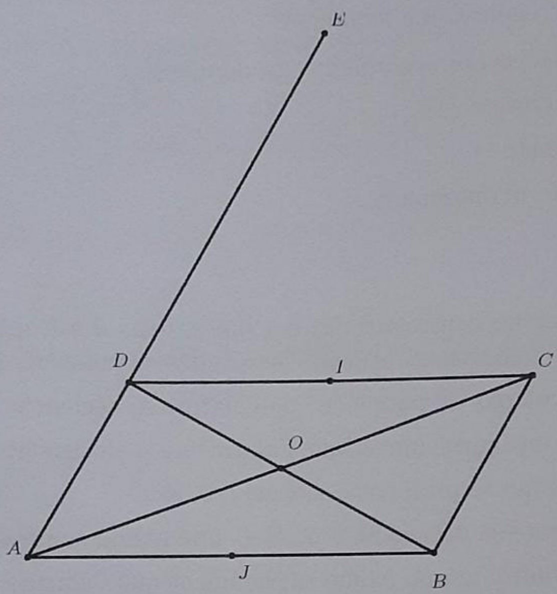
(c) Déterminer l'ensemble des points M du plan $\mathscr{P}$ pour lesquels on a : $M_1M_2 = AD$.

5. Soit Δ la médiatrice de $[AB]$ et G le point d'intersection de Δ et (AD) et $g = S_\Delta \circ R'$.

(a) Déterminer $g(A)$ et $g(B)$.

(b) Montrer que : g est une symétrie glissante que l'on précisera l'axe et le vecteur.

(c) Quelle est l'image par g du parallélogramme $ABCD$?



Exercice 5 :

1. (a) Déterminer le reste de la division euclidienne de 2021 par 16.

(b) En déduire que $2021^4 \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 16)$.

(c) Montrer alors que $2021^{2001} \equiv 2021 (\mathrm{mod}\, 16)$.

2. On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_0 = 2021^4 - 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $u_{n+1} = (u_n + 1)^5 - 1$.

(a) Vérifier que : $u_0 \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 5)$.

(b) Montrer que : $u_{n+1} = u_n \left[u_n^4 + 5\left(u_n^3 + 2u_n^2 + 2u_n + 1\right)\right]$.

(c) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad u_n \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 5^{n+1})$.

3. (a) Vérifier que $u_3 = 2021^{500} - 1$.
En déduire que $2021^{500} \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 625)$.

(b) Montrer alors que : $2021^{2001} \equiv 2021 (\mathrm{mod}\, 625)$.

(c) Vérifier que 16 et 625 sont premiers entre eux.

(d) Déterminer un entier dont l'écriture décimale du cube se termine par 2021.