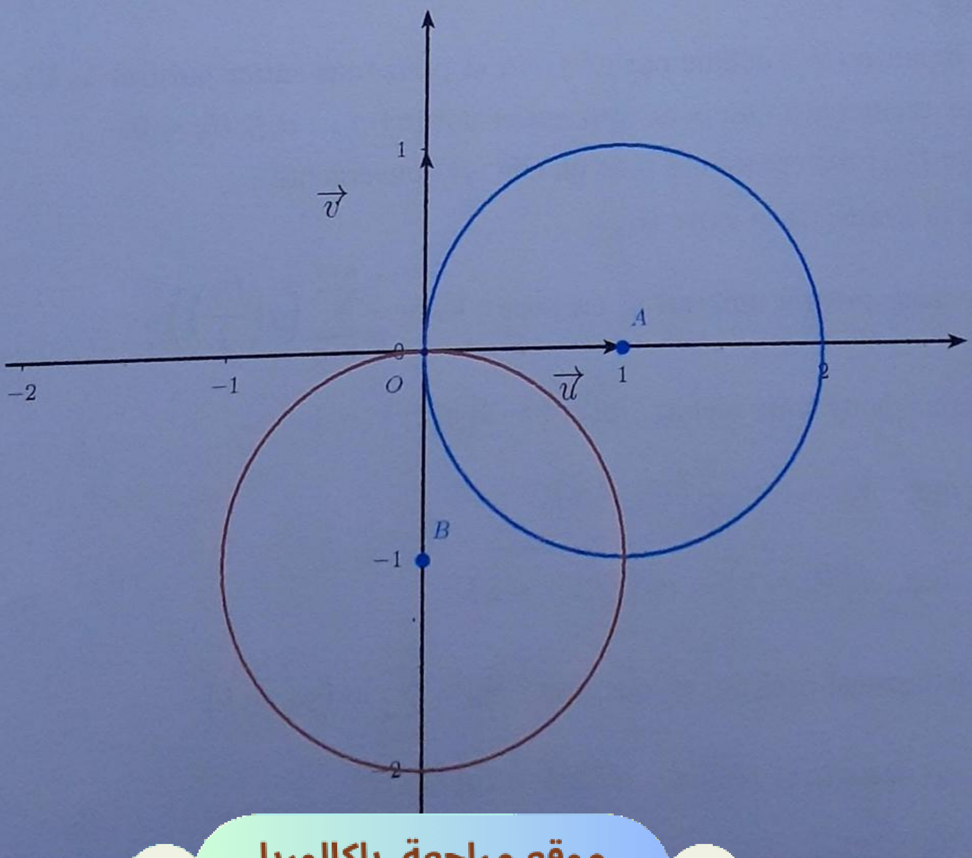
SUJET 02

Exercice 1 :

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E_1) : z^2 - (1-i)z - i = 0$
2. On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E_2) : z^2 - (1-i)\left(e^{i\theta}+1\right)z - i\left(e^{2i\theta}+1\right) = 0$.
   (a) Montrer que le discriminant de l'équation (E_2) est $\Delta = 2i\left(e^{i\theta}-1\right)^2$.
   (b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E_2).
3. Soit θ un réel de l'intervalle $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.
   Dans le plan rapportée à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A, B, M_1 et M_2 d'affixes respectives $1, (-i)$, $z_1 = e^{i\theta} - i$ et $z_2 = 1 - ie^{\theta}$.
   (a) Montrer que $z_1 = 2\sin\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4}\right)e^{\left(\frac{\theta}{2}+\frac{3\pi}{4}\right)}$ et que $z_2 = 2\cos\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4}\right)e^{i\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}$.
   (b) En déduire que $\frac{z_1}{z_2} = -\tan\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$.
   (c) Montrer alors que les points O, M_1 et M_2 sont alignés.
   (d) Vérifier que $\frac{z_1 - z_B}{z_2 - z_A} = i$. En déduire que $BM_1 = AM_2 = 1$ et que $\overrightarrow{BM_1} \perp \overrightarrow{AM_2}$.
4. Dans cette question on prend $\theta = \frac{\pi}{3}$.
   Dans la Figure 2 de l'annexe jointe, on tracé dans un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$ les cercles $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ de même rayon 1 et de centres B et A, respectivement.
   (a) Montrer $\left(\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{BM_1}}\right) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$.
   (b) Placer dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$ les points M_1 et M_2.



Exercice 2 :

A. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$.

1. Montrer que : $g(x) = 1$ si et seulement si $x = 0$.
2. Montrer que pour tout réel x, $\quad g(x) \geq 1$.
3. On note $\alpha = \ln(\sqrt{2} - 1)$.

   a. Soit x un réel. Vérifier que $g'(x) + 1 = \dfrac{e^{-x}}{2}\left(e^x - e^{\alpha}\right)\left(e^x + 1 + \sqrt{2}\right)$

   b. Étudier selon les valeurs du réel x, le signe de $g'(x) + 1$.

B. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x - 1 + g(x)$. On note $\mathscr{C}$ la courbe de f dans le plan rapporté à un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1. Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}$. Interpréter graphiquement.
2. Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x}$. Interpréter graphiquement.
3. Vérifier que : $f(\alpha) = \ln(\sqrt{2} - 1) + \sqrt{2} - 1$. Dresser le tableau de variations de f.
4. Écrire une équation de la tangente T à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse nulle. Étudier la position de $\mathscr{C}$ par rapport à T.
5. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ possède exactement deux solutions dans $\mathbb{R}$, dont l'une est nulle et l'autre que l'on notera β telle que $\beta < \alpha$
6. Dans le graphique ci-jointe on donne les courbes γ et γ' représentatives respectives de g et g'.

   a. Construire les points A et B de coordonnéesrespectives $(\alpha, f(\alpha))$ et $(\beta, 0)$.

   b. Construire T puis $\mathscr{C}$.
7. Soit $\mathscr{A}$ l'aire, en unité d'aire de la partie du plan limitée par $\mathscr{C}$, T et les droites d'équations respectives $x = \alpha$ et $x = 0$.

   Montrer que $\mathscr{A} = 1 + \alpha$.

C. On considère la suite (U_n) définie par : $U_0 = \alpha$ et pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = f(U_n)$.

1. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n , $\quad \alpha \leq U_n \leq 0$.
2. Montrer que (U_n) est croissante puis qu'elle est convergente.
3. Déterminer la limite de la suite (U_n).
4. Pour tout entier naturel non nul n, on pose : $V_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\left(g\left(\frac{U_k}{2}\right)\right)^2$.

   a. Montrer que pour tout réel x, $\quad g(2x) = 2\left(g(x)\right)^2 - 1$.

   b. Montrer que : $V_n = 1 + \dfrac{1}{2n}\left(U_n - \alpha\right)$.

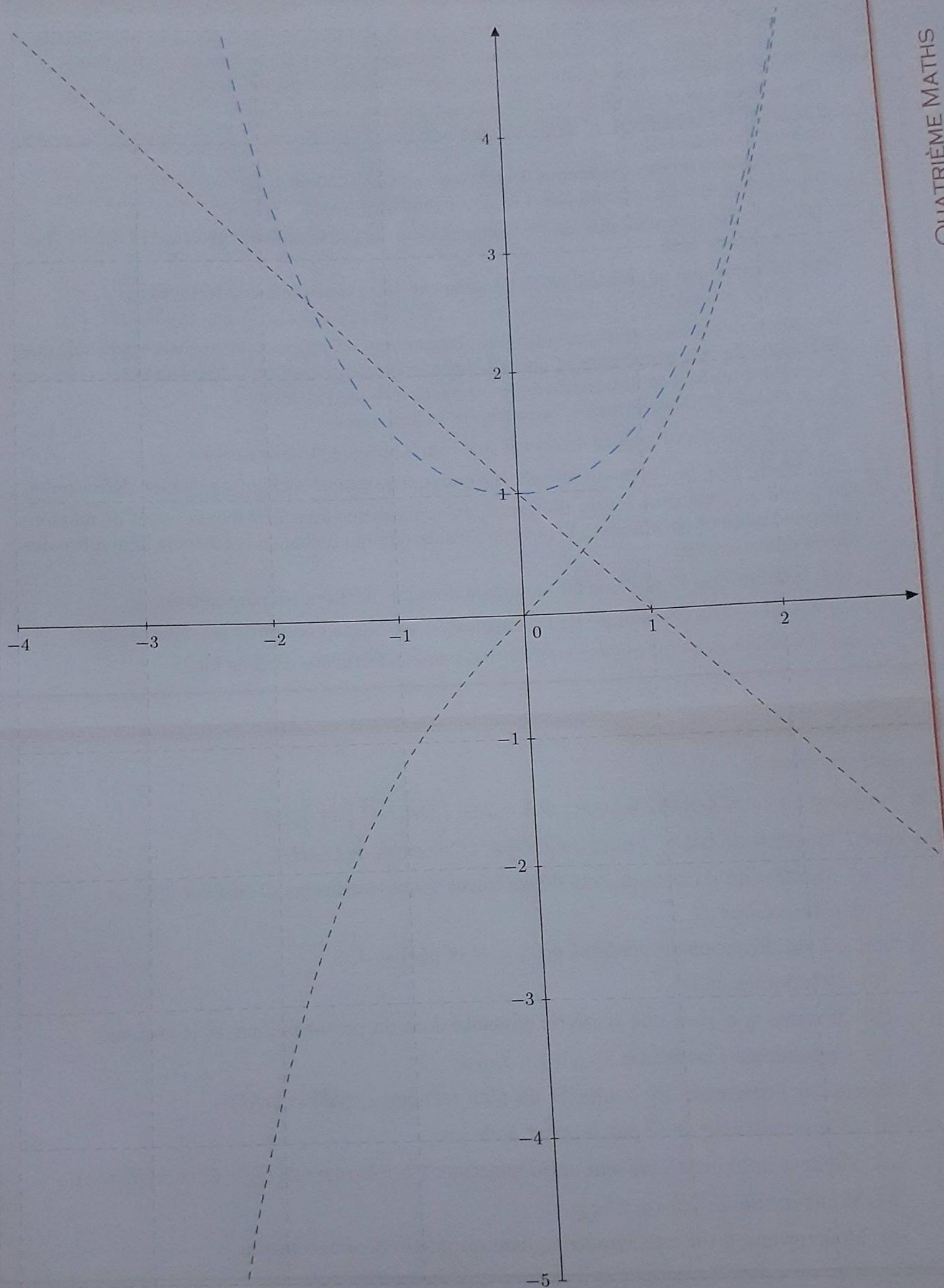
   c. Déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} n\left(V_n - 1\right) = \ln\left(\sqrt{1 + \sqrt{2}}\right)$

D. Pour tout entier naturel non nul n, on pose : $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln\left(g\left(\frac{\alpha}{2^k}\right)\right)$.

(a) Montrer que pour tout réel x, $\quad g'(2x) = 2g(x)g'(x)$

(b) Calculer $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{g'(x)}$.

(c) Montrer que : l...


4
3
2
1
0
−1
−2
−3
−4
−5
−4
−3
−2
−1
1
2

Exercice 3 :

Une usine produits des souris d'ordinateur. Chaque souris fabriqué peut présenter deux défauts : le défaut A et le défaut B. Une souris est dite défectueuse s'il présente l'un de deux défauts. Toutes les probabilités seront données par des valeurs approchées à 10^{-3} prés.

1. On prélève une souris au hasard dans la production d'une journée.
   On note A l'événement « la souris présente le défaut A » et B l'événement « la souris présente le défaut B » .
   Les probabilités des évènements A et B sont $p(A) = 0,06$ et $p(B) = 0,1$.
   On suppose que les évènements A et B sont indépendants.
   (a) Calculer la probabilité de l'évènement C « la souris prélevée présente le défaut A et le défaut B »
   (b) Montrer que la probabilité de l'évènement D « la souris est défectueuse est $p(D) = 0,154$.
2. On suppose que les souris produites par l'usine comportent exactement deux types tels que 60% sont des souris optiques et que 3% des souris mécaniques sont défectueuses.
   On prélève au hasard une souris de la production d'une journée.
   On note par M l'évènement « la souris est mécanique ».
   (a) Calculer la probabilité de choisir une souris optique et défectueuse.
   (b) En déduire la probabilité de choisir une souris optique sachant qu'elle est défectueuse.
3. On prend au hasard un lot de 100 souris, on suppose que les souris fonctionnent de manière indépendantes et on note par Y la variable aléatoire qui à chaque lot associe le nombre des souris défectueuses.
   (a) Justifier que Y suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
   (b) Quelle est la probabilité de l'évènement « au moins une souris est défectueuse ?
   (c) Combien peut-on espérer trouver des souris défectueuse dans ce lot ?

Exercice 4 :

Le plan est orienté.

On considère un carré $OABC$ tel que : $OA = 2$ et $\left(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$.

On note I le milieu de $[AO]$, J celui de $[OC]$ et Ω le centre de $OABC$.

1. (a) Montrer qu'il existe un seul déplacement f qui transforme O en C et I en J.
   (b) Caractériser f.
2. Soit g l'antidéplacement vérifiant $g(O) = C$ et $g(I) = J$.
   (a) Déterminer $g(A)$.
   (b) Montrer que g est une symétrie glissante dont on précisera l'axe et le vecteur.
   (c) Caractériser l'isométrie $S_{(IJ)} \circ f \circ S_{(OI)}$.
3. Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que : $f(M) = g(M)$.
4. Soit D le symétrique de O par rapport à A.
   (a) Montrer qu'il existe un seul antidéplacement h tels que : $h(D) = C$ et $h(B) = A$.
   (b) Montrer que $h = S_{(OB)} \circ t_{\overrightarrow{DA}}$.
   (c) Montrer que h est une symétrie glissante que l'on caractérisera.