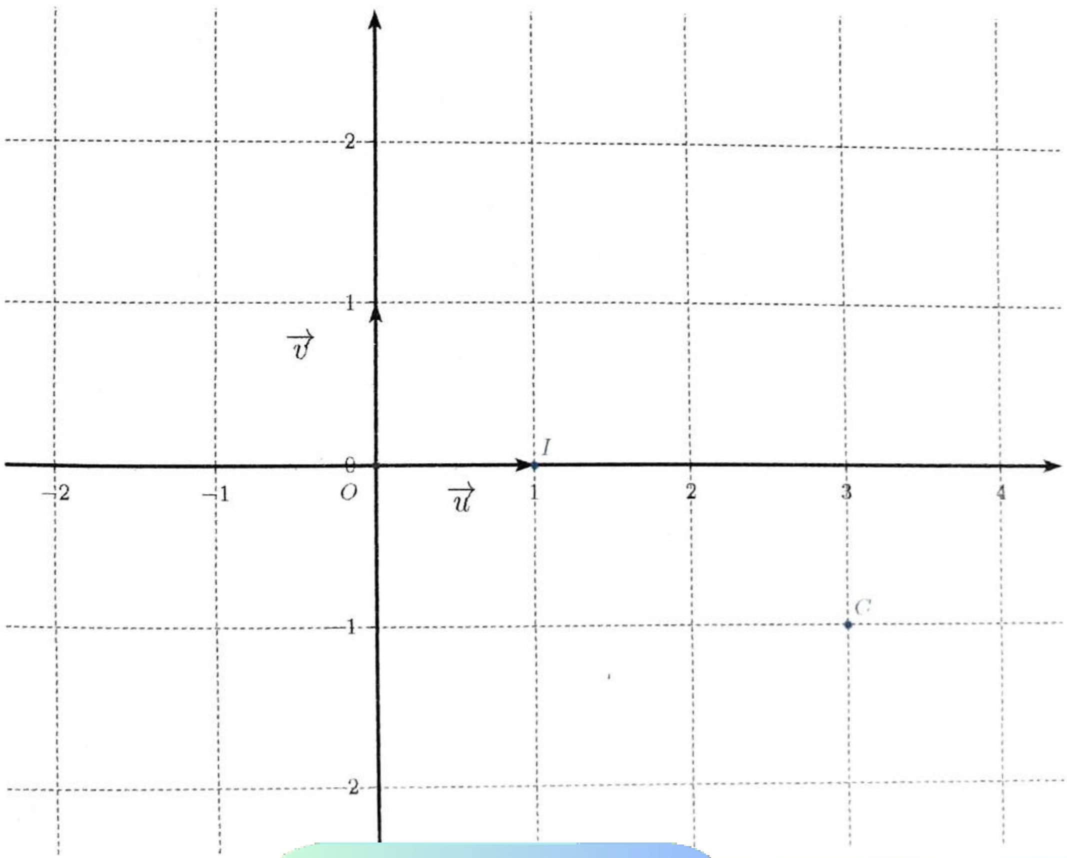
Sujet 03

Exercice 1 :

Dans la figure de l'annexe jointe, on a placé, dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$ les points I et C d'affixes respectives : $z_I = 1$ et $z_C = 3 - i$.

1. Soit Γ l'ensemble des points M d'affixes : $z_M = 1 + \sqrt{5}e^{i\theta}$ avec $\theta \in \mathbb{R}$.
   (a) Montrer que Γ est un cercle de centre I dont on précisera le rayon.
   (b) Vérifier que $C \in \Gamma$ puis construire Γ.
   (c) Soit α un réel tel que : $z_C = 1 + \sqrt{5}e^{i\alpha}$. Déterminer les valeurs de $\cos\alpha$ et $\sin\alpha$
2. On considère dans $\mathbb{C}$, l'équation $(E) : z^2 - 2z + 1 + 2\sqrt{5} - i\sqrt{5} = 0$.
   Montrer que l'équation (E) admet deux solutions distinctes (on ne demande pas la résolution de l'équation).
3. On note A et B les points d'affixes respectives z_A et z_B solutions de l'équation (E) tel que : $\text{Im}(z_A) > 0$.
   (a) Vérifier que I est le milieu du segment $[AB]$.
   (b) Montrer que $(z_A - 1) \times (z_B - 1) = 2\sqrt{5} - i\sqrt{5}$.
   (c) En déduire que les points A et B appartiennent au cercle Γ.
4. (a) Montrer que $(\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{IA}}) + (\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{IB}}) \equiv \alpha[2\pi]$.
   (b) En déduire que $(\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{IA}}) = \dfrac{\alpha}{2} + \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.
   (c) Donner un procéder de construction du point A à partir du point C et construire les points A et B.



Exercice 2 :

On considère la fonction f définie sur $[0,1]$ par : $f(x) = xe^{-x}$.

A. 1. Montrer que f est strictement croissante sur $[0,1]$ puis dresser son tableau de variation.

2. Montrer que : pour tout réel $x \in [0,1]$, $f(x) \leq x$.

3. a. Montrer que f réalise une bijection de $[0,1]$ sur $\left[0, \frac{1}{e}\right]$.

b. On note f^{-1} la fonction réciproque de f.

Montrer que f^{-1} est dérivable sur $\left[0, \frac{1}{e}\right[$ puis déterminer $\lim_{x \to 0^+} \frac{f^{-1}(x)}{x}$.

c. Tracer les courbes (C) et (C') représentatives respectives de f et f^{-1} dans le même plan rapporté à un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$. (unité graphique est 5 cm)

B. On considère la suite (U_n) définie par : $U_0 = 1$ et pour tout n de $\mathbb{N}$, $U_{n+1} = f(U_n)$.

1. a. Soit x un réel de $[0,1]$. Montrer que : $e^x \geq 1 + x$ puis que $e^{-x} \leq \frac{1}{1+x}$.

b. Montrer que pour tout entier naturel n, $f\left(\frac{1}{n+1}\right) \leq \frac{1}{n+2}$.

2. Montrer par récurrence que pour tout n de $\mathbb{N}$, $0 < U_n \leq \frac{1}{n+1}$

3. Montrer que (U_n) est décroissante.

4. Déterminer $\lim_{n \to +\infty} U_n$.

C. 1. Soit h la fonction définie sur $[0,1]$ par : $f(x) = (1 + x + x^2)e^{-x} - 1$.

a. Étudier le sens de variation de h puis déduier que pour tout réel $x \in [0,1]$, $h(x) \geq 0$.

b. Montrer que : pour tout réel $x \in [0,1]$, $x \leq e^x - 1 \leq x + x^2$.

2. Soit n un entier naturel tel que $n \geq 1$.

Montrer que : $1 \leq \frac{1}{U_n} - \frac{1}{U_{n-1}} \leq 1 + \frac{1}{n}$, puis que $n \leq \frac{1}{U_n} - 1 \leq n + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

3. Vérifier que que pour tout entier $k \geq 2$, $\frac{1}{k} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{dx}{x}$.

4. Montrer que pour tout entier naturel $n \geq 1$, $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leq 1 + \ln n$.

5. Déterminer $\lim_{n \to +\infty} \left(nU_n\right)$.

D. Pour tout entier naturel $n \geq 1$, on pose : $V_n = \int_{U_{n+1}}^{U_n} f^{-1}(x)dx$.

1. Montrer que pour tout $n \geq 1$, $U_n^2\left(1 - e^{-U_n}\right) \leq V_n \leq U_{n-1}U_n\left(1 - e^{-U_n}\right)$.

2. Vérifier que : $n^3 U_{n-1} U_n \left(1 - e^{-U_n}\right) = \left(nU_n\right)^3 \times \frac{f^{-1}(U_n)}{U_n} \times e^{-U_n} \times \frac{e^{U_n} - 1}{U_n}$.

3. Déterminer $\lim_{n \to +\infty} n^3 V_n$.

Exercice 3 :

Pour interroger ses élèves, un professeur de mathématiques place dans un sac 30 cartons identiques :

20 de ces cartons portent chacun une question de complexe et les autres une question de statistique.

Un élève tire au hasard un carton de ce sac et répond à la question inscrite sur ce carton.

∘ la probabilité que l'élève réponde juste a une question est (0,5).

∘ la probabilité que l'élève réponde juste à une question de complexe est (0,6).

On considère les évènements suivants :

C : « Le carton tiré porte une question de complexe ».

S : « Le carton tiré porte une question de statistique ».

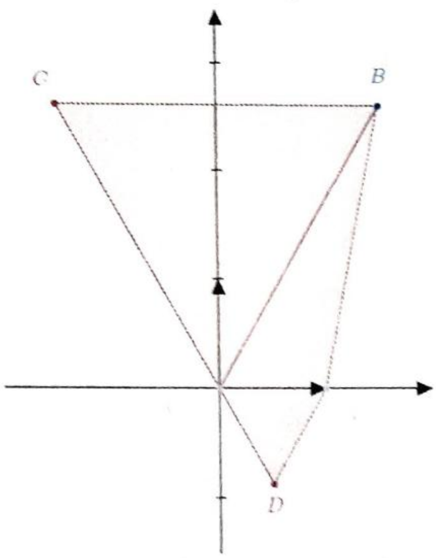
J : « L'élève répond juste à la question tirée ».

On choisie au hasard un élève de cette classe.

1. (a) Montrer que $p(J/S) = 0,3$.
   (b) Construire un arbre pondéré qui modélise la situation.
   (c) L'élève a répondu juste à la question tirée, calculer la probabilité que cette question soit une question de statistique.
2. On choisie cinq élèves au hasard, quelle est la probabilité qu'il y en ait au moins un élève répond juste à la question tirée.
3. Le professeur attribue les notes suivantes :
   - 5 pour une réponse juste en complexe.
   - n pour une réponse juste en statistique.
   - -2 pour une réponse non juste.

   Soit X la variable aléatoire désignant la note obtenue par l'élève.
   (a) Déterminer la loi de la probabilité de X.
   (b) Calculer en fonction de n, l'espérance mathématique $E(X)$.
   (c) Pour quelle valeur de n, $E(X) = 1,4$

Exercice 4 :



Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on donne les points A et B d'affixes respectives 1 et $be^{i\frac{\pi}{3}}$ avec b est un réel strictement positif. On considère les points C et D tels que OBC et AOD soient deux triangles équilatéraux directs.
Soit $r = r_C \circ r_D$ où r_D et r_C sont les rotations d'angle $\frac{\pi}{3}$ et centre respectifs D et C.

A. 1. Montrer que r est une rotation que l'on précisera l'angle.
   2. Déterminer $r(A)$.
   3. Montrer que l'écriture complexe de r est : $z' = e^{i\frac{2\pi}{3}} z + e^{i\frac{\pi}{3}}\left(b - e^{i\frac{\pi}{3}}\right)$.

B. 1. Soit Ω le centre de r. Montrer que l'affixe de Ω est $z_\Omega = \frac{\sqrt{3}}{3} i\left(b - e^{i\frac{\pi}{3}}\right)$.

2. Vérifier que $A\Omega = \frac{\sqrt{3}}{3}\sqrt{\left(b-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}$, puis montrer que Ω est le centre du cercle circonscrit du triangle OAB.
3. b étant donné. Donner un procédé de construction de Ω.
4. On note G le centre de gravité du triangle OAD.
   a. Montrer que : $z_G = \frac{1+e^{-i\frac{\pi}{3}}}{3}$ puis que $z_{\overrightarrow{G\Omega}} = \frac{\sqrt{3}}{3}ib$.
   b. Déterminer alors l'ensemble des point Ω lorsque b varie dnas l'intervalle $]0,+\infty[$.
5. Montrer que Ω est le milieu de $[OB]$ si et seulement si $b=2$.

C. Dans toute la suite $b=2$. On pose $f = r \circ s$ où s est la symétrie orthogonale d'axe (OA).

1. Vérifier que Ω et D sont symétries par rapport à (OA).
2. Déterminer $f(A)$ et $f(D)$ puis montrer que f est une symétrie glissante.
3. Construire l'axe δ de f.
4. Pour tout point M d'affixe z, on considère le point M' d'affixe z' telle que $z' = e^{i\frac{2\pi}{3}}\bar{z} + \sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}}$.
   a. Vérifier que $e^{i\frac{\pi}{3}}\left(2-e^{i\frac{\pi}{3}}\right) = \sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}}$
   b. Montrer que lorsque M varie alors le milieu du segment $[MM']$ varie sur une droite fixe que l'on précisera.

Exercice 5 :

a étant un entier naturel impair.

I. Pour tout entier naturel n, on note $A_n(a) = a^{2^n} + 2^{2^n}$.

1. Soit p un diviseur premier de A_m et soit m un enter naturel tel que $m > n$
   1. Montrer que $a^{2^m} \equiv 2^{2^m} \pmod{p}$.
   2. Montrer que $p \geq 3$.
   3. Déduire que p ne divise pas $A_m(a)$.
2. Montrer que $A_{2021}(a)$ et $A_{2022}(a)$ sont premiers entre eux.

II. n étant un entier naturel tel que $n \geq 5$. On note $f_n = A_n(1)$ et $B_n = f_n - f_{n-1} + 1$.

1. Montrer que : $f_{n+1} + f_n - 1 = B_n\left(f_n + f_{n-1} - 1\right)$.
2. a. Montrer que : $\left(f_n + f_{n-1} - 1\right) \wedge B_n = B_n \wedge \left(2 \times 2^{2^{n-1}}\right)$.
   b. Déduire que $f_n + f_{n-1} - 1$ et B_n sont premiers entre eux.
   c. Sachant que $3 \times 7 \times 13 \times 97 \times 241 \times 673$ est la décomposition en facteurs premiers du nombre $f_5 + f_4 - 1$, montrer que le nombre $f_n + f_{n-1} - 1$ possède au moins $n+1$ facteurs premiers.