

EXERCICE 1 :(5 points)

Dans le plan orienté, on considère un rectangle ABCD

tel que $AB=2AD=2$ et $(\overline{AB}, \overline{AD}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$.

Soient I et J les milieux respectifs de [AB] et [DC].

1. On pose $f = t_{\overline{IB}} \circ R_{(I, -\frac{\pi}{2})}$.

a. Identifier $S_{(IC)} \circ S_{(AJ)}$ et $S_{(AJ)} \circ S_{(IC)}$.

b. Déduire que f est une rotation que l'on caractérisera.

2. On pose $g = f \circ S_{(ID)}$.

a. Déterminer $g(D)$ et $g(J)$.

b. Montrer que g n'admet pas de point invariant.

c. En déduire que g est une symétrie glissante. Déterminer alors l'axe Δ de g et son vecteur \vec{u} .

3. Pour tout point M du plan on considère les points $M_1 = g(M)$ et $M_2 = t_{\overline{DI}}(M)$.

Montrer que M_1 et M_2 sont symétriques par rapport à une droite que l'on déterminera.

4. On muni le plan d'un repère orthonormé $(A, \overline{AI}, \overline{AD})$ et soit φ l'application qui à tout point M d'affixe z on associe le point M' d'affixe z' tel que $z' = -i\bar{z} + 3 + i$

a. Montrer que φ est une isométrie.

b. Déterminer l'ensemble des points invariants par φ et déduire la nature de .

c. Montrer que $\varphi \circ \varphi$ est une translation et déduire le vecteur et l'axe de φ

d. Prouver que $\varphi = g$.

EXERCICE 2 : (4 points)

Soit n un entier naturel non nul et f_n la fonction définie sur $[-1, 1]$ par : $f_n(x) = x^n \sqrt{1-x^2}$

On désigne par Cf_n la courbe représentative de f_n dans le plan rapporté

repère orthonormé (o, \vec{i}, \vec{j}) .

1. Dresser selon la parité de n le tableau de variation de f_n .

2. Construire Cf_1 et Cf_2

3. Soit la fonction Ψ définie sur $[-1, 1]$ par : $\Psi(x) = \int_0^x f_2(t) dt$.

Et Soit la fonction F définie sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ par : $F(\theta) = \Psi(\sin \theta)$.

a. Montrer que F est dérivable sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ et déterminer sa fonction dérivée

b. Montrer que pour tout réel θ de $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ $F(\theta) = \frac{\theta}{8} - \frac{1}{32} \sin(4\theta)$

4. En déduire la valeur de $A = \int_{-1}^1 f_2(x) dx$. Que représente la valeur trouvée ?

5. Calculer l'aire comprise entre les deux courbes Cf_1 et Cf_2

6. On pose $I_n = \int_0^1 f_n(x) dx$

a. En utilisant une intégration par parties, montrer que pour tout $n \geq 2$, $I_{n+1} = \frac{n}{n+3} I_{n-1}$

b. Montrer que $I_{2n} = \pi \cdot \frac{(2n)!}{2^{2n+2} n!(n+1)!}$

EXERCICE 3 : (5 points)

Pour tout entier naturel $n \geq 1$.

On pose $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos t \cdot \sin^n t}{1 - \sin t} dt$ et $U_n = 1 \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \dots + \frac{1}{n} \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$

1. Montrer que pour tout réel t de $\left[0, \frac{\pi}{6}\right]$ et pour tout entier naturel $n \geq 1$.

$$\cos t(1 + \sin t + \sin^2 t + \sin^3 t + \dots + \sin^{n-1} t) = \frac{\cos t}{1 - \sin t} - \frac{\cos t \cdot \sin^n t}{1 - \sin t}$$

2. a- Montrer que pour tout entier naturel $n \geq 1$. $0 \leq I_n \leq \frac{2}{n+1}$

b- En déduire que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$

3. a- Montrer que $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos t}{1 - \sin t} dt - U_n$

b- En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$

EXERCICE 4 : (6 points)

Soit la fonction f définie sur $] -1, 1[$ par : $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^4}}$

1. Montrer que f est une bijection de $] -1, 1[$ sur un intervalle I que l'on déterminera.

2. Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} continue sur I .

3. On désigne par C_f et $C_{f^{-1}}$ les courbes représentatives de f et f^{-1} dans le plan rapporté à un même repère orthonormé (o, \vec{i}, \vec{j}) .

Tracer avec soin C_f et $C_{f^{-1}}$

4. Soit la fonction F définie sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ par : $F(\theta) = \int_0^{\sqrt{\sin \theta}} \frac{x}{\sqrt{1-x^4}} dx$.

a- Montrer que F est dérivable sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ et pour tout réel θ de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ $F'(\theta) = \frac{1}{2}$

b- En déduire $F(\theta)$

c- Calculer $A = \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{x}{\sqrt{1-x^4}} dx$ Que représente la valeur trouvée.

d- En déduire la valeur de $\int_0^{\sqrt{\frac{2}{3}}} f^{-1}(x) dx$