LPBT **Mr Masmoudi. R**

Sujet de révision N°1

EXERCICE 1 :

Dans le plan orienté, on considère un rectangle $ABCD$ tel que $AB = 2AD = 2$ et $(\overrightarrow{AB}, \widehat{\overrightarrow{AD}}) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$. On note I et J les milieux respectifs des segments $[AB]$ et $[DC]$ et soit $K = S_{(CD)}(I)$.

1) On pose $f = S_{(IC)} \circ t_{\overrightarrow{AB}} \circ S_{(IJ)}$.
   a) Identifier l'application $S_{(BC)} \circ S_{(IJ)}$.
   b) En déduire que f est une rotation que l'on caractérisera.
2) On pose $g = f \circ S_{(IJ)}$. Montrer que g est une symétrie glissante.
3) On munit le plan du repère orthonormé direct $(A, \overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AD})$. Soit φ l'application qui à tout point $M(z)$ associe le point $M'(z')$ tel que : $z' = i\bar{z} + 1 + i$.
   a) Montrer que φ est un antidéplacement.
   b) Donner les affixes des points C et J.
   c) Déterminer $\varphi(A)$ et $\varphi(D)$. En déduire que $\varphi = g$.
   d) Déterminer alors l'axe Δ de g et son vecteur $\vec{u}$.
   e) Soit $B' = g(B)$. La droite Δ coupe (BD) en P et (CB') en Q. Montrer que $g(P) = Q$.

EXERCICE 2 :

I- Soit $n \in IN$ tel que $n \geq 2$ et l'équation $(E_n) : x - ny = 2$.

1°) Résoudre (E_n) dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

2°) Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ le système $\begin{cases} x - ny = 2 \\ x \wedge y = 2 \end{cases}$.

II- 1°) Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation $17x - 13y = 1$.

2°) a) Trouver l'ensemble des entiers n tels que $(n+1)^{17} \equiv 2 (\text{mod } 17)$.

b) Trouver l'ensemble des entiers naturels n tels que $(n+3)^{13} \equiv 5 (\text{mod } 13)$.

c) En déduire les entiers naturels n tels que $\begin{cases} (n+1)^{17} \equiv 2 (\text{mod } 17) \\ (n+3)^{13} \equiv 5 (\text{mod } 13) \end{cases}$

EXERCICE 3 :

On considère la cible, formée de $(n+12)$ cartons $(n \in \mathbb{N}^{\times})$ chacun marqué d'une des lettres A, B, C ou D, suivante : $\boxed{A}\boxed{A}\boxed{B}\boxed{B}\boxed{B}\boxed{B}\boxed{C}\boxed{C}\boxed{C}\boxed{C}\boxed{C}\boxed{C}\boxed{D}\boxed{D}\boxed{D}\boxed{D}$ ……………………..$\boxed{D}\boxed{D}\boxed{D}\boxed{D}$.

Un jeu de hasard est formé d'un dispositif électronique lançant de façon aléatoire une fléchette sur cette cible. On suppose que la fléchette atteint toujours un seul carton.

Si la fléchette atteint un carton marqué A, le joueur gagne 8 points.

Si la fléchette atteint un carton marqué B, le joueur gagne 5 points.

Si la fléchette atteint un carton marqué C, le joueur ne gagne aucun point.

Si la fléchette atteint un carton marqué D, le joueur perd a points ($a > 0$).

On note X l'aléa numérique égal au gain algébrique du joueur.

1) Donner la loi de probabilité de X.
2) Déterminer a en fonction de n pour que le jeu soit équitable. Exprimer dans ce cas la variance $V(X)$ en fonction de n.
   Dans la suite on fixe $n = 8$. Un second dispositif électronique lance simultanément deux fléchettes sur la cible. On note Ω l'univers des possibles et E et F les évènements :
   E : " Les deux fléchettes atteignent toutes les deux un carton marqué D "
   F : " Les deux fléchettes atteignent des cartons différents ".
3) Montrer que card(Ω) = 210 puis calculer p(F).
4) Sachant que les fléchettes atteignent des cartons différents, calculer la probabilité qu'elles atteignent un carton marqué D.
5) Calculer la probabilité que les deux fléchettes atteignent un carton marqué D sachant qu'elles atteignent le même carton. En déduire p(E).

On suppose que le dispositif lance successivement k fléchettes sur la cible ($k \geqslant 4$) . Calculer la probabilité des évènements suivants :
G : " On atteint au plus deux fois un carton marqué D "
H : " Un seul carton marqué A et un seul carton marqué B sont atteints "
K : " Les deux premiers cartons portent la même marque et les deux derniers aussi "

EXERCICE 4 :

Soit l'équation **(E_θ)** : $Z^2 - e^{i\theta}\,[2 + \sqrt{2}(-1 + i)]\,Z + 2\sqrt{2}(-1 + i)\,e^{i2\theta} = 0$; $\theta \in [0 ; \frac{\pi}{2}]$.

A) 1) Vérifier que $Z_0 = 2\,e^{i\theta}$ est une solution de **(E_θ)** .

2) Déduire alors l'autre solution Z_1 de l'équation **(E_θ)** .

B) Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

On donne les points M , M' e t M'' d'affixes respectives :

$$Z = 2\,e^{i\theta} \quad , \quad Z' = \sqrt{2}(-1 + i)\,e^{i\theta} \quad \text{et} \quad Z'' = i + 4\,e^{i(\theta + \frac{3\pi}{4})} .$$

1) Montrer que M' est l'image de M par la rotation R de centre O et d'angle $\frac{3\pi}{4}$.

2) Montrer que M'' est l'image de M' par une homothétie h que l'on caractérisera .

3) Déduire l'ensemble **(Γ)** des points M'' lorsque θ varie dans $[0 ; \frac{\pi}{2}]$.

C) *Soit l'équation* **(E'$_\theta$)**: $(\sqrt{2}Z-1)^3=(-2+2i)e^{i\theta}Z^3$.

1) *Déterminer les racines cubiques du nombres complexe* $a=(-2+2i)e^{i\theta}$.

2) *Soit* $\alpha\in]0\,;2\pi[$. *Montrer que* $\dfrac{\sqrt{2}Z-1}{Z}=\sqrt{2}\,e^{i\alpha}\Leftrightarrow Z=\dfrac{\sqrt{2}}{4}\left(1+i\cot g\dfrac{\alpha}{2}\right)$.

3) *Résoudre alors dans* $\mathbb{C}$ *l'équation* **(E'$_\theta$)**. *(Donner les solutions sous la forme cartésienne)*

EXERCICE 5 :

A) Soit f la fonction définie sur $[1\,;+\infty[$ par : $f(x)=e^{-x\sqrt{\ln x}}$.

1) a) Etudier la dérivabilité de f à droite en 1. b) Dresser le tableau de variation de f.
   a) Montrer que f réalise une bijection de $[1\,;+\infty[$ sur un intervalle J qu'on précisera.
2) Montrer que l'équation $f(x)=\dfrac{1}{2}x$ admet dans $[1\,;+\infty[$ une solution unique $\alpha\in]1{,}19\,;1{,}2[$.
3) Construire $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_f^{-1}$ dans un même repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.
4) Soit $\mathscr{A}$ l'aire du domaine plan limité par $\mathscr{C}_f$; $\mathscr{C}_f^{-1}$; l'axe des abscisses et les droites d'équations : $x=\dfrac{\alpha}{2}$ et $x=\alpha$.

   a) Montrer que $\mathscr{A}=\dfrac{\alpha^2}{2}-\alpha+1+2\displaystyle\int_1^\alpha\left(f(x)-\dfrac{\alpha}{2}\right)dx$.

   b) En utilisant les variations de f, montrer que : $\dfrac{\alpha^2}{2}-\alpha+1\leqslant\mathscr{A}\leqslant 2\alpha-\dfrac{\alpha^2}{2}-1$.

B) Pour tout réel x on pose : $F(x)=\displaystyle\int_1^{e^{x^2}}\ln(f(t))\,dt$.

1) Vérifier que F est paire.
2) Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et calculer $F'(x)$ pour $x\geqslant 0$.
3) Montrer que pour tout $x\geqslant 0$ on a : $F(x)\leqslant-\dfrac{2}{3}x^3$.
4) Dresser le tableau de variation de F et tracer l'allure de $\mathscr{C}_F$.

C) Pour $x\geqslant 1$ et pour $n\in\mathbb{N}^\times$, on pose $I_n(x)=\displaystyle\int_1^x\frac{(\ln(f(t)))^n}{t^{n+1}}\,dt$.

1) a) Montrer que $I_n(x)=\dfrac{2(-1)^n}{n+2}e^{\left(\frac{n+2}{2}\right)(\ln(\ln x))}$.

   b)Déterminer suivant les valeurs de x, $\lim\limits_{n\to+\infty}I_n(x)$.

2) Pour $n\in\mathbb{N}^\times$, on pose $S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}I_k(e)=\sum_{k=1}^{n}\frac{2(-1)^k}{k+2}$ et $U_n=S_{2n}$ et $V_n=S_{2n+1}$.

   a) Montrer que U est décroissante et que V est croissante.

   b) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^\times$ on a : $U_n\geqslant V_n$.

c) En déduire que U et V convergent vers la même limite.

3) On pose $J_n = \int_1^0 (-x)^{n+1}\,dx$ où $n \in \mathbb{N}^\times$ et $J = \int_1^0 \frac{x^2}{1+x}\,dx$.

a) Calculer J_n et J.

b) Montrer que $\sum_{k=1}^{n} J_k = J + \int_0^1 \frac{(-x)^{n+2}}{1+x}\,dx$.

c) Montrer que $\int_0^1 \frac{x^{n+2}}{1+x}\,dx \leqslant \frac{1}{n+3}$. En déduire la limite de S_n(On remarquera $(-1)^{n+2} = (-1)^n$)